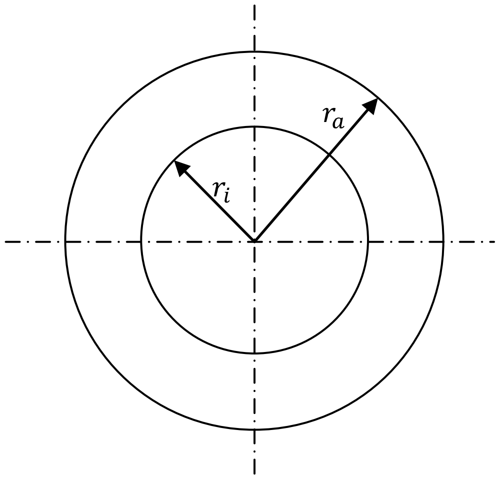
HOCHSCHULE MERSEBURG (FH)
University of Applied Sciences

René Schwarz (BMIP06)
Fachbereich Ingenieur- und Naturwissenschaften

mail@rene-schwarz.com
http://www.rene-schwarz.com

Technische Mechanik II - Elastostatik

Beispielaufgabe 37 vom 26. Juni 2007



Geg.:

$E = 2{,}1 \cdot 10^5\ N/mm^2$

$\nu = 0{,}3$

$r_a = 3 \cdot r_i$

$\Delta r = 0{,}001 \cdot r_i$

Gegeben sei ein Kreisring, dessen Innenradius um Δr aufgeweitet wird.

Die radialen Spannungen der Innenseite $\sigma_r(r_i)$, der Außenseite $\sigma_r(r_a)$ sowie die tangentialen Spannungen innen $\sigma_\varphi(r_i)$ und außen $\sigma_\varphi(r_a)$ sind anzugeben.

Der allgemeine Lösungsansatz zur Errechnung von radialen und tangentialen Spannungen sowie einer Verschiebung lautet

$$\sigma_r = c_1 + \frac{c_2}{r^2} - \frac{3+\nu}{8} \cdot \varrho \cdot \omega^2 \cdot r^2$$

$$\sigma_\varphi = c_1 - \frac{c_2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8} \cdot \varrho \cdot \omega^2 \cdot r^2$$

$$u = \frac{1}{E} \cdot \left((1-\nu) \cdot c_1 \cdot r - (1+\nu) \cdot \frac{c_2}{r} - \frac{1-\nu^2}{8} \cdot \varrho \cdot \omega^2 \cdot r^2 - \nu \cdot \sigma_z \cdot r \right)$$

Allerdings ist laut Aufgabenstellung keine Drehung des Querschnittes vorgesehen, d.h. auch die Kreisfrequenz ω ist NULL. Da wir zudem noch den ebenen Spannungszustand betrachten, tritt keine Spannung in z-Richtung auf, d.h. auch σ_z ist NULL.

$$\Rightarrow \quad \omega^2 = 0, \quad \sigma_z = 0$$

Damit ergeben sich die drei Gleichungen zu:

$$\sigma_r = c_1 + \frac{c_2}{r^2}$$

$$\sigma_\varphi = c_1 - \frac{c_2}{r^2}$$

$$u = \frac{1}{E} \cdot \left((1-\nu) \cdot c_1 \cdot r - (1+\nu) \cdot \frac{c_2}{r} \right)$$

Für die Lösung dieser Gleichungen ist die Formulierung von Randbedingungen notwendig. Da es zwei unbekannte Integrationskonstanten c_1 und c_2 gibt, ist die Formulierung mindestens zweier Randbedingungen notwendig.
Da sich der Kreisring in freiem Raum befindet und nicht eingespannt ist, kann sich der Außenrand frei ausdehnen, d.h. unsere radiale Spannung am Außenrand ergibt sich zu NULL.

$$(1) \qquad \sigma_r(r_a) = 0$$

Ebenfalls ist durch die Aufgabenstellung bekannt, dass die Verschiebung des inneren Kreises um einen Betrag von Δr erfolgt. Die letzte notwendige Randbedingung ist somit gefunden.

$$(2) \qquad u(r_i) = \Delta r$$

Aus Randbedingung (1) folgt:

$$0 = c_1 + \frac{c_2}{r_a^2} \qquad \Rightarrow \; c_2 = -c_1 \cdot r_a^2$$

Und aus Randbedingung (2):

$$\Delta r = \frac{1}{E}\left((1-\nu) \cdot c_1 \cdot r_i - (1+\nu) \cdot \frac{c_2}{r_i} \right)$$

$$\Delta r \cdot E = (1-\nu) \cdot c_1 \cdot r_i - (1+\nu) \cdot \frac{c_2}{r_i}$$

c_2 einsetzen:

$$\Delta r \cdot E = (1-\nu) \cdot c_1 \cdot r_i + (1+\nu) \cdot \frac{c_1 \cdot r_a^2}{r_i}$$

$$\Delta r \cdot E = c_1 \cdot \left((1-\nu) \cdot r_i + (1+\nu) \cdot \frac{r_a^2}{r_i} \right)$$

$$c_1 = \frac{\Delta r \cdot E}{(1-\nu) \cdot r_i + (1+\nu) \cdot \frac{r_a^2}{r_i}}$$

$$\Delta r = 0{,}001 \cdot r_i, \;\; r_a = 3 \cdot r_i$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = \frac{0{,}001 \cdot r_i \cdot E}{(1-\nu) \cdot r_i + (1+\nu) \cdot 9 r_i}$$

$$c_1 = \frac{0{,}001 \cdot E}{(1-\nu) + 9 \cdot (1+\nu)}$$

$$c_1 = \frac{0{,}001 \cdot E}{10 + 8\nu}$$

$$c_1 = \frac{0{,}001 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \;\; N/mm^2}{10 + 8 \cdot 0{,}3}$$

$$\boldsymbol{c_1 = 16\frac{29}{31} \;\; N/mm^2}$$

René Schwarz
Hochschule Merseburg (FH)
Fachbereich Ingenieur- und Naturwissenschaften
mail@rene-schwarz.com
http://www.rene-schwarz.com

$$c_2 = -c_1 \cdot r_a^2$$

$$c_2 = -16\frac{29}{31}\ N/mm^2 \cdot r_a^2$$

$$\boldsymbol{c_2 = -152\frac{13}{51}\ N/mm^2 \cdot r_i^2}$$

Somit sind beide Integrationskonstanten ermittelt und können in σ_r und σ_φ eingesetzt werden. Damit ergeben sich folgende Endgleichungen:

$$\sigma_r = 16\frac{29}{31}\ N/mm^2 - 152\frac{13}{51}\ N/mm^2 \cdot \frac{r_i^2}{r^2}$$
$$\sigma_\varphi = 16\frac{29}{31}\ N/mm^2 + 152\frac{13}{51}\ N/mm^2 \cdot \frac{r_i^2}{r^2}$$

Aus diesen beiden Endgleichungen lassen sich nun die gesuchten Größen ermitteln.

$$\boldsymbol{\sigma_r(r_a)} = 16\frac{29}{31}\ N/mm^2 - 152\frac{13}{51}\ N/mm^2 \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2} = 16\frac{29}{31}\ N/mm^2 - 152\frac{13}{51}\ N/mm^2 \cdot \frac{1}{9} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\sigma_r(r_i)} = 16\frac{29}{31}\ N/mm^2 - 152\frac{13}{51}\ N/mm^2 \cdot \frac{r_i^2}{r_i^2} = \boldsymbol{-135,32\ N/mm^2}$$

$$\boldsymbol{\sigma_\varphi(r_a)} = 16\frac{29}{31}\ N/mm^2 + 152\frac{13}{51}\ N/mm^2 \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2}$$
$$= 16\frac{29}{31}\ N/mm^2 + 152\frac{13}{51}\ N/mm^2 \cdot \frac{1}{9} = \boldsymbol{67,69\ N/mm^2}$$
$$\boldsymbol{\sigma_\varphi(r_i)} = 16\frac{29}{31}\ N/mm^2 + 152\frac{13}{51}\ N/mm^2 \cdot \frac{r_i^2}{r_i^2} = \boldsymbol{169,19\ N/mm^2}$$

Lösung im Überblick

$$\boldsymbol{c_1 = 16\frac{29}{31}\ N/mm^2}$$

$$\boldsymbol{c_2 = -152\frac{13}{51}\ N/mm^2 \cdot r_i^2}$$

$$\boldsymbol{\sigma_r(r_a) = 0}$$
$$\boldsymbol{\sigma_r(r_i) = -135,32\ N/mm^2}$$

$$\boldsymbol{\sigma_\varphi(r_a) = 67,69\ N/mm^2}$$
$$\boldsymbol{\sigma_\varphi(r_i) = 169,19\ N/mm^2}$$

René Schwarz
Hochschule Merseburg (FH)
Fachbereich Ingenieur- und Naturwissenschaften
mail@rene-schwarz.com
http://www.rene-schwarz.com