Prof. Dr.-Ing. Monika Trundt

HOCHSCHULE
MERSEBURG (FH)
University of Applied Sciences

ELEKTROTECHNIK TEIL II

MESSTECHNIK UND WECHSELSTROM

Vorlesungsskript | 10. August 2007

Version
10. August 2007

Dieses Skript wurde im Rahmen einer HiWi-Tätigkeit von **René Schwarz** überarbeitet; Fehler und Korrekturvorschläge bitte an **<mail@rene-schwarz.com>**.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen der elektrischen Messtechnik

1.1 Bedeutung der elektrischen Messtechnik

Die elektrische Messtechnik befasst sich mit der Messung elektrischer Größen, dazu zählen z. B. Spannung, Ladung und Strom, Widerstand, Induktivität, Kapazität, Phasenwinkel sowie Frequenz. Zu beachten ist, dass die gemessenen Größen nur selten direkt angezeigt werden können, denn die Messsignale müssen normalerweise verarbeitet werden. Dies bedeutet, das Signal zu verstärken, zu kompensieren, umzuformen, umzusetzen, zu filtern, zu speichern, zu linearisieren oder umzurechnen. Nach dem Prozess des Verarbeitens kann das Signal mittels Skalenanzeige, Ziffernanzeige, Bildschirmanzeige visuell angezeigt werden oder per Schreibe oder Drucker auf Papier gebracht werden. Die Ergebnisse dienen dann zur Überwachung, Steuerung oder Regelungen von Prozessen, z. B. in Maschinen.

Die Entnahme eines elektrischen Signals aus einem Vorgang erfolgt über ein Messgerät. Dieses muss sich im Signalfluss befinden und ist weiterhin teil eines Messsystems. Die letzte Vereinbarung ist deswegen notwendig, da ein Messsystem auch mehrere Messgeräte gleichzeitig besitzen kann. Die Art der verwendeten Messgeräte beeinflussen das Ergebnis in puncto Genauigkeit und der Geschwindigkeit der Ausgabe oder Anzeige. Zwischen den Messgeräten oder zwischen Messgerät und dem Messsystem werden Signale ausgetauscht, die Informationen über die zu messende Größe enthalten. Diese können aus Amplituden oder Frequenzen bestehen oder ein codiertes Signal enthalten.

Die elektrische Messtechnik kann aber nicht nur elektrische Signale messen und auswerten, sondern auch physikalische Effekte, die sich nicht auf elektrische Größen beziehen. Darunter fallen z. B. optische, chemische, mechanische, thermische und magnetische Signale. Zur Messung benötigt man dabei Aufnehmer, Sensoren, Dedektoren oder Fühler.

Zusammenfassend kann man festhalten, dass jede physikalische Größe auch als elektrisches Signal darstellbar und auch weiterverarbeitbar ist. Die elektrische Messtechnik beschäftigt sich mit der Gewinnung des Signals, mit der Struktur der Messeinrichtung, den Eigenschaften der Signalformen, der Verarbeitung und Übertragung von Messsignalen sowie der Ausgabe und Darstellung der gewonnenen Informationen. Sie besitzt gegenüber anderen Verfahren eine Reihe von Vorteilen. Sie kann Messwerte leistungsarm bis leistungslos erfassen, sie besitzt ein hohes Auflösungsvermögen, ein gutes dynamisches Verhalten, eine stete Messbereitschaft, eine bequeme Möglichkeit der Datenübertragung über beliebige Distanzen sowie eine leichte Datenverarbeitung. Damit ist die elektrische Messtechnik ein fester Bestandteil in allen Gebieten der Technik geworden.

1.2 Drehspulmesswerk

Das Prinzip eines Drehspulmesswerkes ist relativ einfach zu verstehen. Zwischen zwei magnetischen Feldern wirkt eine Kraft, die zur Messung von Strömen genutzt wird. Das Messwerk wird in einem radialhomogenen Feld eines Dauermagneten beweglich aufgehängt. Fließt dann durch die Spule ein Strom I, so wird die Spule senkrecht zur Richtung des Magnetfeldes ausgelenkt. Dieser Vorgang lässt sich auch mathematisch beschreiben. Dabei ist l die Länge der Spule, d der Durchmesser, N die Windungszahl und B die Induktion des Dauermagnetes. Auf die Spule wird eine Kraft F_e ausgeübt:

$$F_e = l \cdot N \cdot B \cdot I$$

Daraus lässt sich das elektrische Moment ableiten:

$$M_e = F_e \cdot \frac{d}{2}$$

Die Spule umschließt die Fläche $A = d \cdot l$, damit ist das Moment:

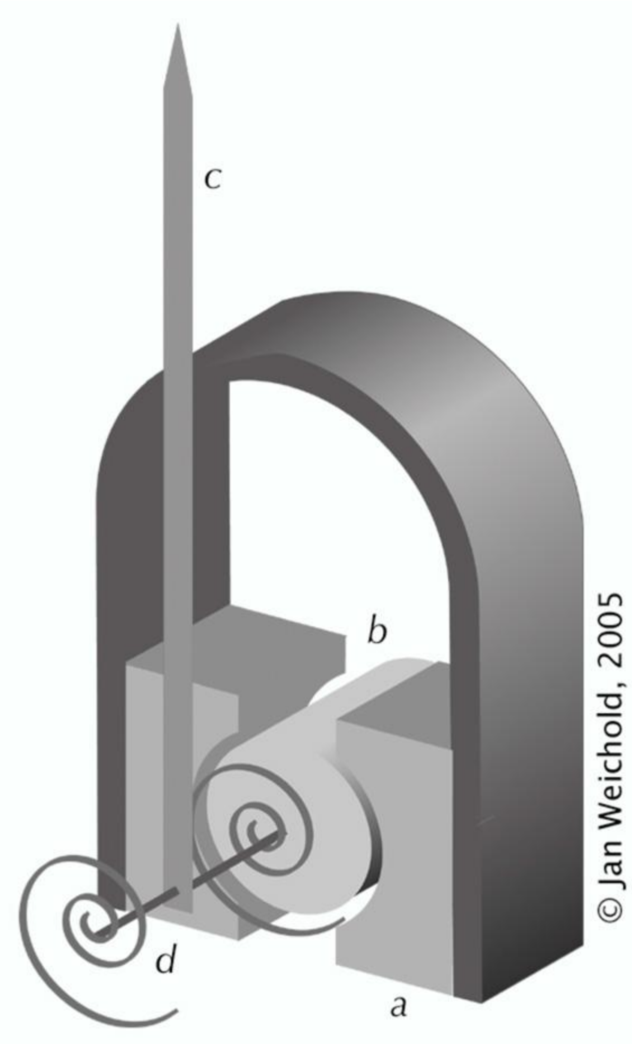
$$M_e = l \cdot N \cdot B \cdot I \cdot 2 \cdot \frac{d}{2} = ANBI$$

Damit sich die Spule nicht in einen Motor verwandelt, der sich dauerhaft dreht, ist sie durch eine Feder „gefesselt". Die Feder erzeugt ein mechanisches Moment $M_m = c \cdot \alpha$, mit $c =$ Federkonstante und $\alpha =$ Ausschlagwinkel. Ist die Spule stromlos, so verharrt die Feder in der Nullstellung. Bei einem Stromfluss wird die Spule ausgelenkt bis:

$$M_e = M_m$$

$$ANBI = c \cdot \alpha$$

$$\alpha = \frac{ANB}{c} \cdot I = kI$$



Drehspulmesswerk, a Hufeisenmagnet, b bewegliche Spule, c Zeiger, d Feder

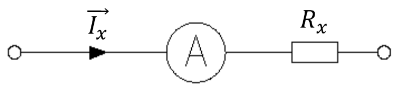
Kapitel 2

Messwerterfassung

Vorgegeben ist ein Zeigerinstrument. Dabei ist zu beachten, dass der Innenwiderstand nicht vernachlässigt ist. Hieraus resultiert der Eigenverbrauch und es werden Messfehler hervorgerufen.

2.1 Strommessung

Im Gegensatz zur Spannungsmessung wird bei der Strommessung das Messgerät in Reihe zum Messobjekt geschaltet. Im Messgerät sollte es einen möglichst kleinen Innenwiderstand geben ($R_M \to 0$), um das zu messende Objekt nicht zu beeinflussen und um den Engerigeverbrauch ($P_M = I_m^2 \cdot R_M$) gering zu halten.



Betrachten wir nun die Strommessung einer Gleichstromschaltung. Der einfachste Stromkreis besteht aus einer Spannungsquelle mit einer Leerlaufspannung, einem Innenwiderstand und einem Lastwiderstand. Möchte man den Strom messen, so trennt man die Schaltung auf und schaltet das Messgerät in Reihe zum Lastwiderstand. Damit werden beide vom gleichen Strom durchflossen. Allerdings wird der Strom vom Messgerät beeinflusst. Zur Begründung dient das Ohm`sche Gesetz. Die Gleichung für den Strom ohne Innenwiderstand des Messgerätes lautet:

$$I_b = \frac{u_L}{R_i + R_b}$$

Mit dem Messgerät verändert sich die Gleichung und lautet nun:

$$I_M = \frac{u_L}{R_i + R_b + R_M}$$

Der Wahre Strom I_b wird nur dann angezeigt, wenn $R_m \ll (R_i + R_b)$. Also sollte der Widerstand des Strommessers möglichst gering sein. Im nächsten Beispiel wollen wir den Kurzschlussstrom I_k der Quelle messen. Dabei gilt: der Lastwiderstand $R_b = 0$ und die Quelle wird nur mit dem Messinstrument belastet. Dabei zeigt das Messinstrument den folgenden Strom an:

$$I_M = \frac{u_L}{R_i + R_M}$$

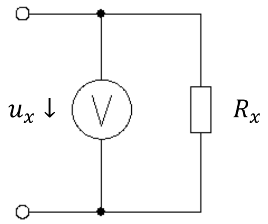
und es gilt:

$$\frac{I_M}{I_k} = \frac{u_L}{R_i + R_M} \cdot \frac{R_i}{u_L} = \frac{1}{1 + \frac{R_M}{R_i}}$$

Für $R_M \ll R_i$ gilt $\frac{I_M}{I_K} = 1$ und für $R_M = R_i$ gilt $I_M = 1/2 \; I_k$, es wird also nur der halbe Kurzschlussstrom angezeigt.

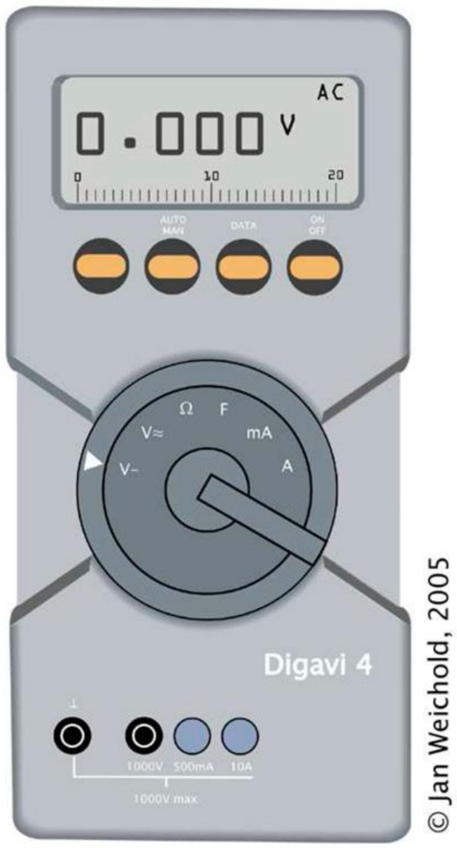
2.2 Spannungsmessung

Bei der Spannungsmessung wird das Messgerät parallel zum Messobjekt geschaltet. Dabei sollte der Innenwiderstand des Messgerätes möglichst groß sein ($R_M \longrightarrow \infty, P_M = u_M{}^2/R_M$). Damit werden die gleichen Bedingungen wie bei der Strommessung erfüllt. Zur Spannungsmessung in Gleichstromkreisen werden die gleichen Instrumente benutzt. Dabei wird der Strom, der durch das Messgeräte fließt, mit dem Widerstand des Messgerätes multipliziert. Das Ergebnis ist die Spannung.



Messen wir nun die Spannung einer Quelle mit der Leerlaufspannung $U_L$und dem Innenwiderstand R_i Dabei wird das Messgerät an die Quelle angeschlossen und es gilt, gemäß der Maschengleichung:

$$I \cdot R_i + I \cdot R_M - U_L = 0$$



Multimeter nach Hartmann & Braun

Es wird angezeigt:

$$u_M = I \cdot R_M$$
$$u_M = u_L - I \cdot R_i$$
$$u_M = u_L - U_{Ri}$$

Die Leerlaufspannung wird nur dann richtig gemessen, wenn $I \cdot R$ vernachlässigbar ist. Vergleichen wir dies mit der Strommessung, so kann man hier folgende Regel festhalten: Der Widerstand eines Spannungsmessers sollte möglichst groß sein $R_M \gg R_i$, also sind Spannungen hochohmig zu messen. Dabei gilt:

$$\frac{u_M}{u_L} = \frac{I \cdot R_M}{I\,(R_i + R_M)} = \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_M}}$$

Für $R_M \gg R_i$ gilt $u_M = u_L$ und für $R_i = R_M$ gilt $u_M = \frac{1}{2}\,u_L$, im letzten Fall wird nur die halbe Leerlaufspannung angezeigt.

Eine andere Aufgabe zur Verdeutlichung. Zwischen den Klemmen 1 und 2 liegt ein Verbraucher an. Das Messinstrument zeigt die am Verbraucher anliegende Spannung an. Der Widerstand muss groß gegenüber dem Verbraucher sein ($R_M \parallel R_b \approx R_b$ wenn $R_M \gg R_b$).

$$R_{ges} = R_M \parallel R_b = \frac{R_M \cdot R_b}{R_M + R_b}$$

wenn $R_M \gg R_b$ dann

$$R_{ges} = \frac{R_M \cdot R_b}{R_M} \approx R_b$$

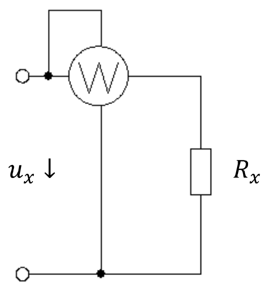
2.3 Leistungsmessung

Der Leistungsmesser verfügt über einen Spannungs- und eine Strompfad. Dabei muss der Strompfad in Reihe zum Messobjekt geschaltet werden und der Spannungsmesser parallel. Dabei sollten beide Pfade einen möglichst geringen Eigenverbrauch aufweisen. Diese so genannten Kombinations-messungen werden zur Kennlinienbestimmung und zur Widerstandsbestimmung eingesetzt. Dabei wird gefordert, dass die Messung durch das Gerät nicht verfälscht werden darf.

2.4 Spannungsrichtige Messung

Bei dieser Schaltung ist der gemessene Wert: $R_X i = u_X/I$, der tatsächliche Wert ist aber $R_x = u_x/I_X$.
Da der gemessene Strom $I > I_x$ ist, wird für R_x ein zu kleiner Wert ermittelt. Daher ist eine Messwertkorrektur erforderlich:

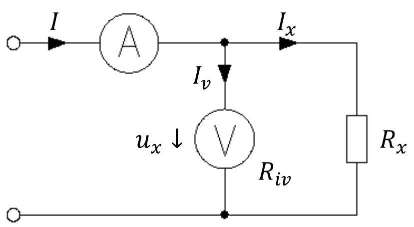
$$R_x = \frac{u_x}{I_x} = \frac{u_x}{I - I_v} = \frac{1}{(I/u_x) - (I_v/u_x)}$$



Damit ist R_x:

$$R_x = \frac{1}{(1/R_x") - (1/R_{iv})}$$

Diese Berechnung wird immer dann angewendet, wenn der Innenwiderstand des Messgerätes R_{iv} wesentlich größer als der gemessene Widerstand ist.



2.5 Stromrichtige Messung

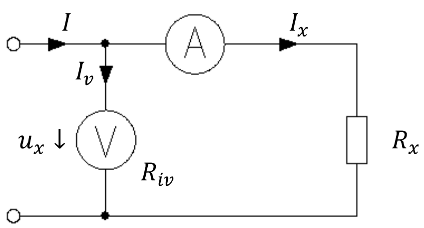
Bei dieser Schaltung ist der gemessene Wert: $R_x' = u_x/I$, der tatsächliche Wert ist aber $R_x = u_x/I_x$. Damit ist aber die Gesamtspannung u größer als der Spannungsabfall über R_x und es wird ein großer Wert für den gesuchten Widerstand ermittelt. Auch hier ist wieder eine Messwertkorrektur notwendig:

$$R_x = \frac{u_x}{I_x} = \frac{u_x - u_a}{I_{X}v} = \frac{u_x}{I_x} - \frac{u_A}{I_x}$$

Damit ist R_x :

$$R_x = R_x" - R_{iv}$$

Diese Berechnung wird immer dann angewendet, wenn der Innenwiderstand des Messgerätes R_{iv} wesentlich kleiner als der gemessene Widerstand ist. Es ist immer gut abzuwägen, ob eine strom- oder spannungsrichtige Messung sinnvoll ist.



Kapitel 3

Messfehler und Messunsicherheit

Bei jeder Messung fließt Energie oder Informationen vom Messgerät zum Messobjekt. Durch den Einbau des Messgerätes darf die zu messende Größe nicht verändert werden. Damit muss man auch die Rückwirkung des Messgerätes auf das Messobjekt sowie die Umgebungsbedingungen wie z.B. Stromversorgung und andere Geräte beachten. Allerdings kann man diese Rückwirkungen nie ganz vermeiden, sondern nur verringern. Ein Beispiel hierfür ist die Spannungs- oder Strommessung, bei der die Quelle immer zusätzlich belastet wird. Dieser Fehler existiert bei jeder anderen Messung meist ebenfalls. Man kann also zusammenfassend sagen, dass auch das Ergebnis bei einer rückwirkungsfreien und bestimmungsgemäßen Nutzung des Messgerätes nicht völlig richtig ist. Die Abweichung zwischen dem wahren Wert x_w und dem gemessenen Wert x bezeichnet man als Fehler Δ_x.

$$\Delta_x = x - x_w$$

Die Fehler kann man in systematische und zufällige Fehler unterteilen. Beide Arten sind in der sogenannten Garantiefehlergrenze eines Messgerätes berücksichtigt.

3.1 Absolute und relative Fehler

Wir nehmen an, dass die Ursache von systematischen Fehlern bekannt ist. Weiterhin können wir Δ_x rechnerisch ermitteln. Damit können wir auch den wahren Wert x_w aus einem angezeigten Wert ermitteln. Dazu ein Beispiel: Wir haben eine Spannung, deren wahrer Wert x_w 100 V ist, das Messgerät zeigt aber 100,6 V an.

Wir legen folgende Gleichung fest:

$$x_w = x - \underbrace{\Delta_x}_{\text{absoluter Fehler}} = x\left(1 - \underbrace{\frac{\Delta_x}{x}}_{\text{relativer Fehler}}\right)$$

Damit beträgt der absolute Fehler, der immer mit einer Einheit angegeben wird:
Δ_x = +0,6 V und der relative Fehler: $\Delta_x / x = 0{,}006$.

3.2 Fehlerfortpflanzung

Die Größe y ist eine Funktion einer anderen Größe und kann nicht direkt gemessen werden.

$$y = f\,(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Die Elemente der Funktion y, also die Größen x , sind mit den Einzelfehlern x_i fehlerbehaftet. Der Einzelfehler addiert sich zu einem Gesamtfehler y. Dieser soll nun berechnet werden. Dabei gilt:

$$\Delta_y = y - y_w = f\,(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) \\ - f(x_1, x_2, \dots., x_n)$$

Damit ist Δ_y die Differenz zwischen den wahren und den fehlerbehafteten Funktionswerten. Die Funktion y kann man in eine Taylorreihe umwandeln.

$$\Delta_y = \frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot \Delta x_1 + \ \dots . + \frac{\delta f}{\delta x_n} \cdot \Delta x_n$$

Somit kann der Messwert y_w korrigiert werden: $y_w = y - \Delta_y$. Zur Verdeutlichung sollen nun zwei mögliche Fälle vorgestellt werden:

Fall 1: y ist die Linearkombination der gemessenen Werte x.

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

Damit ist der Gesamtfehler die Summe der Einzelfehler multipliziert mit einem Koeffizienten.

$$y = a_1 \Delta x_1 + \ a_2 \Delta x_2 + \cdots + a_n \Delta x_n$$

Fall 2: y ergibt sich aus der Multiplikation der gemessenen Werte x. So gilt:

$$y = a_1 \Delta x_1^{a_1} \cdot a_2 \Delta x_2^{a_2} \cdot \dots \cdot a_n \Delta x_n^{a_n}$$

$$\frac{\Delta_y}{y} = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\Delta x_i}{x_i}$$

Zum praktischen Verständnis werden nun an einem Verbraucher Messungen mit den folgenden Fehlern durchgeführt. Gegeben sind die relativen Fehler: $\Delta u/u$ = – 0,011, $\Delta I/I$ = 0,020 sowie $\Delta R/R$ = 0,031. Gesucht ist der relative Fehler der Leistung P. Es gilt:

$$P = \frac{u^2}{R} = u^2 \cdot R^{-1}$$

Damit sind die Exponenten ermittelt, also $a_1 = 2$ und $a_2 = -1$. Gemäß der obigen Vorgehensweisekönnen wir folgende Gleichungen aufstellen:

$$\frac{\Delta P}{P} = a_1 \frac{\Delta u}{u} + a_2 \frac{\Delta R}{R}$$

$$= 2 \cdot \frac{\Delta u}{u} + (-1) \cdot \frac{\Delta R}{R}$$

$$= 2 \cdot (-0{,}011) — (0{,}031)$$

$$= 0{,}009$$

Das Ergebnis besagt, dass die Leistung um 0,009 oder um 0,9% zu groß gemessen wird.

Als weiteres Beispiel nun die Bestimmung eines Gesamtwiderstandes durch Messung der Einzelwiderstände R_1 und R_2, wobei gilt: $R = R_1 + R_2$. Der Widerstand R_1 wird mit dem Messgerät (1) gemessen. Es wird ein Wert von 2 Ω mit einem relativen Fehler $\Delta R_1/R_1$ von 6% ermittelt. Der zweite Widerstand wird mit dem Messgerät (2) gemessen. Es wird ein Wert von 4 Ω mit einem relativen Fehler $\Delta R_2/R_2$ von 2% ermittelt. Es soll nun der absolute und der relative Fehler der Messung bestimmt werden. Vorab noch ein Hinweis: $\Delta R_1/R_1$ = 6% = 0,06, der prozentuale Wert wird also durch einhundert dividiert.

$$\Delta R = \Delta R_1 + \Delta R_2; \frac{\Delta R}{R} = x$$

$$\Delta R_1 = 0{,}06 \cdot R_1 = 0{,}06 \cdot 2\,\Omega = 0{,}12\,\Omega$$

$$\Delta R_2 = 0{,}02 \ \cdot R_1 = 0{,}02 \ \cdot 4\ \Omega = 0{,}08\ \Omega$$

$$\Delta R = 0{,}12\ \Omega \ + 0{,}08\ \Omega$$

$$= 0{,}2\ \Omega$$

Der absolute Fehler beträgt 0,2 Ω. Nun wird der relative Fehler bestimmt.

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{0{,}2\ \Omega}{R_1 + \ R_2} = \frac{0{,}2\ \Omega}{6\ \Omega}$$

= 0,033

= 3,333%

Der relative Messfehler bei der Bestimmung von R beträgt 3,3%. Nun können wir auch den wahren Wert ermitteln.

$$R_w = R \ - \Delta R$$

$$= 6\ \Omega - 0{,}2\ \Omega$$

$$= \ 5{,}8 \ \ \Omega$$

3.3 Wahrscheinlicher Fehler der Einzelmessung und zufällige Fehler

Systematische Fehler können korrigiert werden. Hingegen können zufällige Fehler nicht korrigiert werden. Allerdings bei häufig wiederholten Messungen können Aussagen über den zufälligen Fehler getroffen werden. Diese Wiederholungen sind meist nur unter Laborbedingungen möglich, im realen Betrieb aber kaum. Zufällige oder nicht beeinflussbare Fehler entstehen durch nicht erfassbare Änderungen im Messgerät oder in der Umwelt oder durch den Beobachter selbst. Diese Fehler machen das Ergebnis unsicher.

Wiederholt man Messungen mit zufälligen Fehlern, so streuen diese Werte in einem bestimmten Intervall. Dadurch ist es möglich, den wahrscheinlich wahren Wert durch mathematische Berechnungen zu ermitteln. So ist es möglich, den Mittelwert aller gemessenen Werte x zu bilden. Es ergibt sich dabei der sogenannte Erwartungswert.

$$\bar{x} = x_w = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \ f\text{ü}r\ N \to \infty$$

Wie weit die Werte um diesen Erwartungswert streuen, gibt die Varianz an. Es gilt:

$$o^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_w)^{\,2}\ f\text{ü}r\ N \to \infty$$

Die positive Quadratwurzel aus der Varianz ist die Standardabweichung. In der Praxis ist es möglich, unendlich viele Messungen durchzuführen. Daher wird der Mittelwert $\bar{x}$ aus N endlichen Messwerten als Schätzwert für den wahren Wert angenommen.

$$\bar{x} = \hat{x}_w = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \, f\ddot{u}r \; N \rightarrow \infty$$

Für die Varianz wird der Schätzwert $\hat{o}^2 = s^2$ angenommen und es gilt:

$$s^2 = \hat{o}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \hat{x}_w)^2$$

$$= \frac{1}{N-1} \sum (x_i - \hat{x}_w)^2 \, f\ddot{u}r \; N \rightarrow \infty$$

Die positive Quadratwurzel trägt in der Praxis unterschiedliche Bezeichnungen und wird folgendermaßen ermittelt:

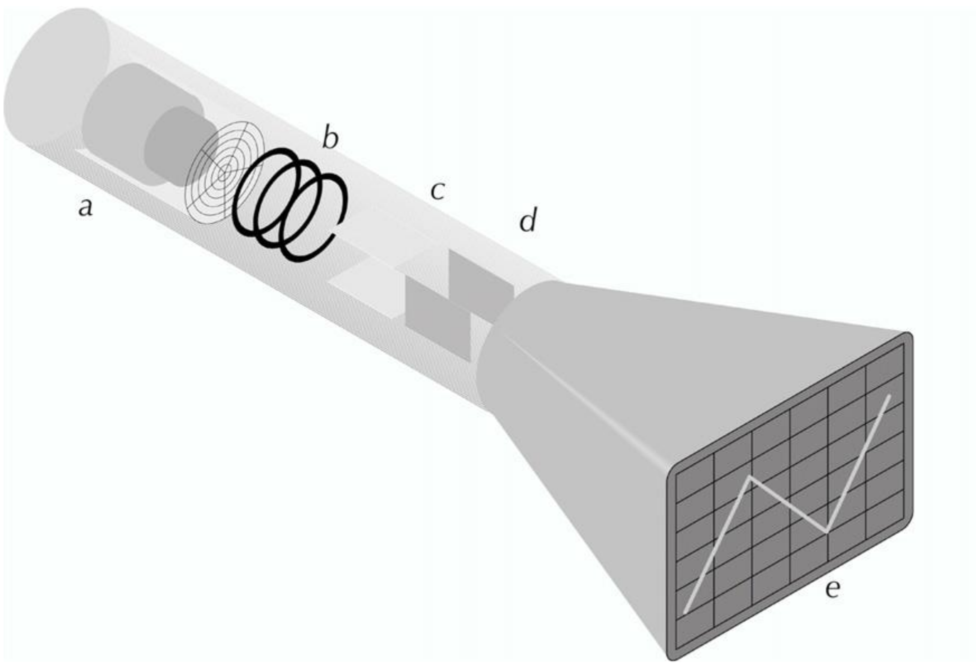
$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

Kapitel 4

Darstellung von Wechselspannungen

Elektrische Schwingungen kann man durch Strom- und Spannungsmesser messen oder anzeigen lassen. Allerdings geben sie nur Mittelwert, Scheitelwerte oder Effektivwerte an. Dadurch ist es nicht möglich, den Ablauf des Schwingungsvorganges darzustellen. Da dies oft von Bedeutung ist, nutzt man hierfür ein Kathodenstrahloszilloskop. Hiermit können schnelle Spannungsverläufe wie z. B. Wechselspannungen sichtbar gemacht werden. Dabei durchläuft ein Elektronenstrahl eine Braunsche Röhre, die nach ihrem Erfinder Ferdinand Braun benannt worden ist. Der Elektronenstrahl trifft nach dem Durchlaufen der Röhre auf den Leuchtschirm und erzeugt einen Lichtpunkt. Die Elektronen werden dabei von einer indirekt geheizten Kathode K emittiert. Die Menge der ausgetretenen Elektronen kann durch eine negative Spannung am sogenannten Wehnelt-Zylinder W verändert werden. Die Bündelung oder Fokussierung des Strahls, die wegen der unterschiedlichen Geschwindigkeiten der Elektronen schwierig ist, erfolgt in der Steinerelektrode S. Durch ein Loch in der Anode passiert der Strahl dann zwei parallele, senkrecht zu einander stehende Plattenpaare P_x und P_y. Dabei wird der Strahl aus der Mittellage abgelenkt. Durch diese Ablenkungen können auch die Spannungen der Ablenkplatten durch die Position des Leuchtfleckes auf dem Bildschirm dargestellt werden. Nachdem die Elektroden die Anodenspannung durchlaufen haben, reicht die Energie des Elektronenstrahls meist nicht mehr aus, um einen Lichtpunkt zu erzeugen. Deswegen werden die Elektronen durch das Feld einer zusätzlichen Anode nachbeschleunigt.

Die zu messende Spannung wird an das Plattenpaar P_x angelegt. Ist diese Spannung eine periodische Wechselspannung, so wird aus dem Leuchtfleck ein vertikaler Strich. Also pendelt der Strahl zwischen den Platten hin und her.



Kathodenstrahlröhre (Braunsche Röhre),

a Kathode und Wehneltzylinder, b Fokussierelektroden,
c horizontale Ablenkungsplatte, d vertikale Ablenkungsplatte, e Bildschirm

Legt man nun an das Plattenpaar P_y gleichzeitig eine Kippspannung, so beschreibt der Elektronenstrahl nun das Linienintegral der Wechselspannung auf dem Bildschirm, denn die Kippspannung bewirkt eine horizontale Ablenkung. Durch die richtige Wahl der Kippfrequenz wird erreicht, dass die zu analysierende Spannung und die Kippspannung die gleichen Phasen besitzen. Es überblenden sich alle Bilder, wenn die Kippspannung zu den Zeiten t', t'', ... zusammenbricht und der Strahl nach A zurückspringt. Dadurch ergibt sich ein stehendes Bild.

Kapitel 5

Die Kirchhoffschen Sätze

Die Kirchhoffschen Sätze umfassen den Knotenpunktsatz und den Maschensatz. Sie beschreiben die Strom- und Spannungsbeziehungen in einfachen Schaltungen und haben damit eine fundamentale Bedeutung in der Elektrotechnik. Sie sind auch Grundlage für die Berechnungen von Netzwerken.

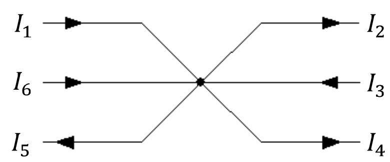
5.1 Knotenpunktsatz

Der Knotenpunktsatz leitet sich aus dem Gesetz der Erhaltung der Ladung ab. Dies bedeutet, dass die gleiche Menge, die in den Knoten hineinfließt, auch wieder abfließen muss. Sonst käme es zu einer Anhäufung von Ladungsträgern im Knoten, was aber der Satz von der Erhaltung der Ladung ausschließt. Somit muss die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme sein. Die Gesamtsumme ergibt dann Null.

$$\sum_{y=1}^{h} I_y = 0$$

Wir vereinbaren, dass die zufließenden Ströme mit $+$ gekennzeichnet werden und die abfließenden Ströme mit $-$ gekennzeichnet werden. Dazu nun zwei Beispiele.

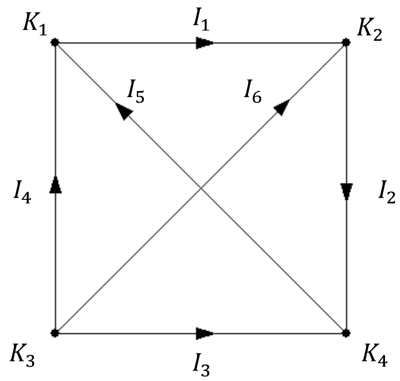
Im ersten Beispiel wolllen wir folgenden Knoten berechnen:



Dabei gilt für den Knoten:

$$\begin{aligned} I_1 + I_3 + I_6 &= I_2 + I_4 + I_5 \\ 0 &= I_2 + I_3 + I_6 - I_2 - I_4 - I_5 \\ &= I_1 - I_2 + I_3 - I_4 - I_5 + I_6 \end{aligned}$$

Im zweiten Beispiel ist die Anzahl der Knoten und Zweige zu bestimmen sowie alle unabhängigen Knotengleichungen zu ermitteln.

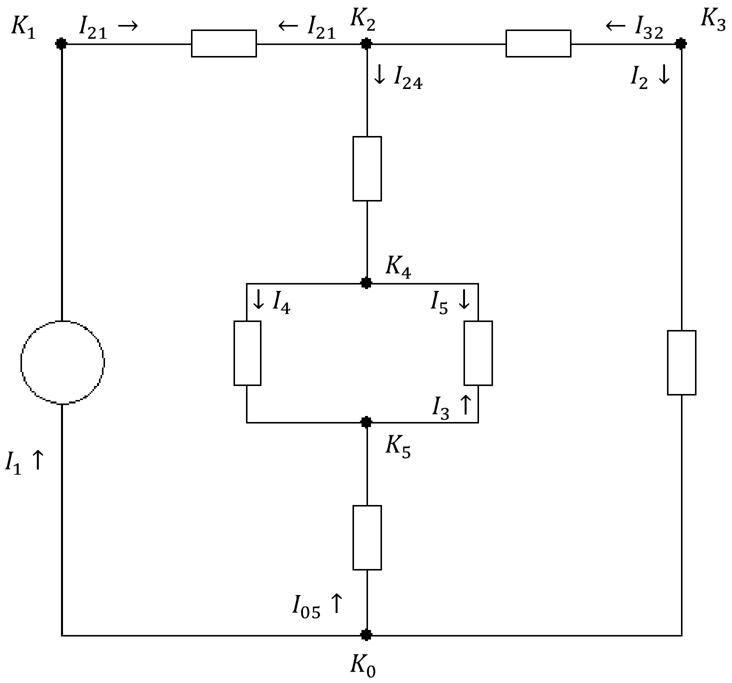


Dieses Beispiel hat sechs Zweige und vier Knoten. Die unabhängigen Knotengleichungen lauten:

$$k1:\ I_4 + I_6 - I_1 = 0$$
$$k2: I_1 + I_5 - I_2 = 0$$
$$k3:\ -I_4 - I_3 - I_5 = 0$$
$$k4: I_3 + I_2 - I_6 = 0$$

Die Addition von k_1, k_2 und k_3 ergibt k_4. Zusammenfassend kann man also sagen: k Knoten liefern nur $k1$ unabhängige Knotengleichungen. Diese sollte man mittels algebraischer Gleichungssysteme lösen.

Dazu noch ein Beispiel: Bestimmen Sie die Ströme zwischen den Knoten $k_1 - k_2 : I_{12},\ k_2 - k_1 : I_{21},\ k_3{-}k_2 : I_{32}, k_2 - k_4 : I_{24}, k_0 - k_5 : I_{05}$ sowie I_4 und I_5 . Betrachtet man die Schaltung, so zeigt sich, dass sie sechs Knoten besitzt, davon müssen fünf unabhängig sein.



5.2 Energieerhaltungssatz

Energie ist das Vermögen, Arbeit zu verrichten. Damit haben Energie und Arbeit die gleiche Einheit: 1 Ws = 1 Nm. Im Gleichstromkreis ergibt sich die elektrische Energie aus der angelegten Spannung und der durch die Spannung bewegten Ladungsmenge:

$$W = u \cdot Q = U \cdot I \cdot t$$

Wobei W die Energie ist, u die Spannung, I der Strom und t die Zeit. Für ein geschlossenes System gilt der Energieerhaltungssatz. Die Summe aller Energien in einem geschlossenen System ist konstant:

$$\sum W = const. \hookrightarrow \frac{dW}{dQ} = 0$$

5.3 Leistung

Die Leistung P ist der Energieumsatz pro Zeiteinheit. Es gilt:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{U \cdot I \cdot t}{T} = U \cdot I$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Hieraus folgt dann mit dem Ohm`schen Gesetz:

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{u^2}{R}$$

In einer Schaltung werden Leistungen zugeführt und es werden Leistungen umgesetzt oder abgegeben. Nach dem Energieerhaltungssatz gilt:

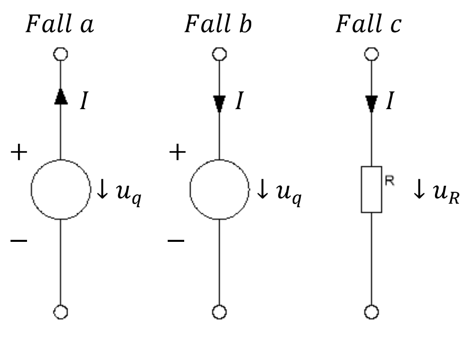
$$\sum_{y=1}^{n} P_y = 0$$

Die Summe aller zugeführten Leistungen ist gleich der Summe aller abgeführten Leistungen.

5.4 Quellen und Verbraucher

Eine elektrische Schaltung enthält Quellen und Verbraucher. Dabei haben Quellenleistungen ein negatives Vorzeichen und Verbraucherleistungen ein positives Vorzeichen. Quellen können in einem geschlossenen System Leistungen zuführen. Dabei treiben sie einen Strom von ihrem höheren Potential durch die Schaltung zu ihrem niedrigeren Potential. Zu beachten ist, dass die Zählpfeile von Quellenspannung und Strom nicht übereinstimmen (Fall a)

Quellen können aber auch aus einem geschlossenen System Leistung entnehmen. Dann fließt der Strom in die Quelle hinein. Nun stimmen auch Zählpfeile von Strom und Spannung überein. Die Leistung erhält ein positives Vorzeichen. (Fall b)

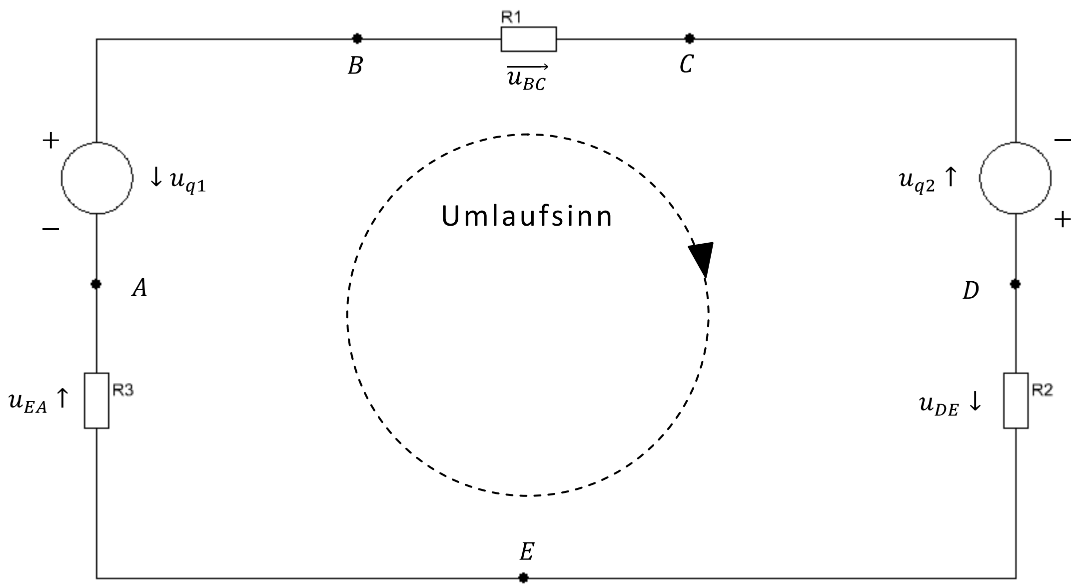


In den Widerständen werden Leistungen umgesetzt, somit erhält die Leistung ein positives Vorzeichen. (Fall c)

Zur Kontrolle von Berechnungen dient die Leistungsbilanz, wobei die Summe aller Leistungen immer Null ergeben muss.

5.5 Maschensatz

In einem Stromkreis durchlaufen die Ladungsträger unterschiedliche Energieniveaus. Wir legen nun willkürlich einen Umlaufsinn fest. Nach dieser Festlegung betrachten wir nun, wie sich die Ladungen durch den Stromkreis bewegen. Ist der Umlauf geschlossen, so bezeichnen wir ihn als Masche. In dieser Masche muss der Energieerhaltungssatz erfüllt sein: $W_{zu} - W_{ab} = 0$.



Kapitel 6

Einfache elektrische Stromkreise

Jeder beliebige Stromkreis kann in einen aktiven und einen passiven Teil getrennt werden. Weiterhin kann man jedes Netz in einzelne Teile zerlegen, die an Knoten zusammengefasst werden. Die Verbindung zwischen zwei Knoten bezeichnet man als Zweig. Einen Zweig der nur an zwei Punkten zugängig ist, bezeichnet man als Zweipol. Dies gilt auch für ein einfaches elektrisches Netzwerk mit zwei stromführenden Anschlüssen. Auch für Zweipole gilt der Energieerhaltungssatz. Aufgrund der Energiebilanz kann man zwei Arten von Zweipolen unterscheiden: einen aktiven und einen passiven Zweipol.

6.1 Aktiver Zweipol (AZP)

In einem aktiven Zweipol befinden sich alle Schaltelemente mit Quellencharakter. Dadurch bringt er Energie in den Stromkreis ein und erhöht somit die Potentialdifferenz. Da diese Energie, gemäß den physikalischen Gesetzen, nicht aus dem Nichts entstehen kann, muss der aktive Zweipol eine vorhandene Energie in eine elektrische Energie umwandeln.

6.2 Passiver Zweipol (PZP)

Der passive Zweipol entnimmt dem Stromkreis Energie und wandelt diese in andere Energieformen um, so z. B. Wärme an ohm´schen Widerständen, mechanische Energie an Motorwellen usw. Somit beschreiben Zweipole Verbraucher immer unabhängig von konkreten Betriebsmitteln. Dazu ein Beispiel:

6.3 Zählpfeile

Die Verbraucherzählpfeile weisen bei Strom und Spannung immer die gleiche Richtung auf. Also bei Energieverbrauch ergibt sich eine positive Leistung und bei Energieerzeugung eine negative Leistung. Die Erzeugerzählpfeile weisen bei Strom und Spannung immer die entgegengesetzte Richtung auf. Damit ergibt sich bei Energieverbrauch eine negative Leistung und bei Energieerzeugung eine positive Leistung. Prinzipiell unterscheiden wir zwischen Spannungsquellen und Stromquellen. Allgemein ist die Aufgabe einer elektrischen Quelle, Energie in den Stromkreis einzuspeisen. Eine ideale Quelle ist dabei ein Zweipol, der zwischen seinen Klemmen eine belastungsunabhängige Spannung oder einen belastungsunabhängigen Strom aufweist. Die Quellen sind aber technisch nicht oder kaum zu realisieren. Als Konstantspannungsquelle oder –stromquelle bezeichnet man Quellen, die diesen Idealvorstellungen relativ nahe kommen. Reale Quellen hingegen sind Generatoren und galvanische Elemente. Sie weisen einen Innenwiderstand auf, haben Verluste abhängig vom Innenwiderstand.

Kapitel 7

Grundstromkreis

Der einfache Stromkreis besteht aus einem aktiven und einem passiven Zweipol. Diese Schaltung bezeichnet man als Grundstromkreis. Im Prinzip kann man alle elektrischen Schaltungen auf ihn zurückführen. Die bestehende Abhängigkeit von Spannung und Strom kann man durch die Klemmgrößen u_k und I beschreiben. Dabei kann man ein Ersatzschaltbild für die Spannungsquelle oder die Stromquelle entwickeln. Diese Ersatzschaltbilder sind auch einsetzbar für zeitlich veränderliche Größen z. B. wie bei sinusförmigen Strömen. Allerdings gibt es da andere Berechnungsmethoden.

Dazu ein Beispiel. Gegeben sind u_q mit 12 V,u_a mit 10,5 V und I mit 0,8 A.
Gesucht sind u_i, R_i, R_a und der Gesamtwiderstand.

$$u_i = u_q - u_a = 12\,V - 10{,}5\,V = 1{,}5\,V$$

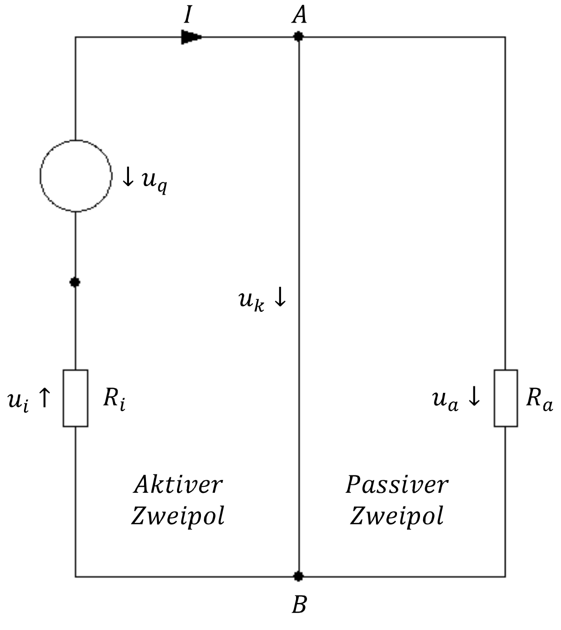
$$R_a = \frac{u_a}{I} = \frac{10{,}5\,V}{0{,}8\,A} = 13{,}1\,\Omega$$

$$R_i = \frac{u_i}{I} = \frac{1{,}5\,V}{0{,}8\,A} = 1{,}87\,\Omega$$

$$R = R_i + R_a = 13{,}1\,\Omega + 1{,}87\,\Omega \approx 15\,\Omega$$

Als nächstes sei eine Messschaltung gegeben. Diese besitzt die Widerstände R_{a1} mit 20 Ω und R_{a2} mit 50 Ω. In der Schalterstellung 1 beträgt I_1 gleich 0,24 A und in Schalterstellung 2 beträgt I_2 gleich 0,1 A. Gesucht sind u_q und R_i. Es gilt:

$$u_q = (R_a + R_i) \cdot I$$



Daraus folgt:

$$I_1\colon\ u_q = (R_a1 + R_i)I_1$$
$$I_2\colon\ u_q = (R_a2 + R_i)I_2$$

Anschließend setzt man die Gleichungen gleich und erhält für $R_i = 7\,\Omega$ und für $u_q = 6{,}4$ V.

Kapitel 8

Überlagerungssatz von Helmholtz

Jede Quelle in einem Netzwerk liefert einen Beitrag zu jedem Zweigstrom des Netzwerkes. Mit Hilfe des ohmschen Gesetzes und der Stromteilerregel kann man jeden Zweigstrom rechnerisch ermitteln. Dabei wird immer nur eine Quelle betrachtet. Alle anderen Quellen werden unwirksam gemacht, durch Leerlauf oder Kurzschluss. Gegenüber den Kirchhoffschen Sätzen müssen nicht alle Zweigströme berechnet werden, sondern nur die relevanten. Besonders eignet sich diese Methode zur Berechnung von Kurzschlussströmen.

Kapitel 9

Zweipoltheorie

Das Netzwerk wird durch geeignete Ersatzschaltungen auf den elektrischen Grundstromkreis reduziert. Dabei wird das Netzwerk aufgetrennt und es werden Ersatzschaltungen für den aktiven und passiven Zweipol gebildet. Bei aktiven Zweipolen gilt folgendes Vorgehen:

Spannungsquelle
Bei Spannungsquellen wird eine Leerlauf-Ersatzschaltung gebildet, die folgende Parameter besitzt: Die Ersatzquellenspannung ist nun eine Leerlaufspannung, der Ersatzinnenwiderstand trägt die Bezeichnung R_{iErs} und der Ersatzbelastungswiderstand trägt die Bezeichnung R_{aErs}. Damit ergibt sich der gesuchte Strom aus:

$$I = \frac{u_L}{R_{iErs} + R_{aErs}}$$

Stromquelle
Bei Stromquellen ist die Ersatzschaltung eine Kurzschlussschaltung. Diese hat folgende Parameter: der Kurzschlussstrom heißt I_k, der Ersatzinnenwiderstand trägt die Bezeichnung R_{iErs} und der Ersatzbelastungswiderstand trägt die Bezeichnung R_{aErs}. Der gesuchte Strom ergibt sich aus:

$$I = I_k \frac{R_{iErs}}{R_{iErs} + R_{aErs}}$$

Ersatzwiderstände
Die Ersatzwiderstände werden unabhängig von der Art der Ersatzschaltungen des aktiven Teils ermittelt. Netzwerkteile werden dabei als reine Widerstandsschaltungen betrachtet. Weiterhin werden alle Quellen des aktiven Zweipols ausgeschaltet.

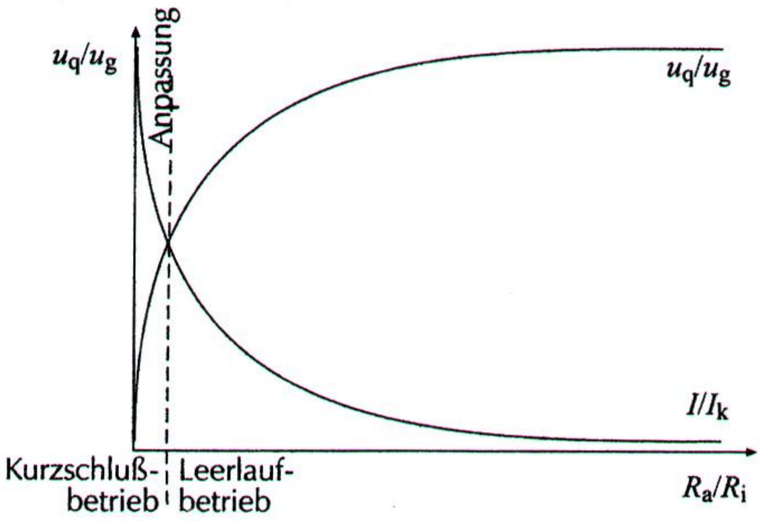
Kapitel 10

Leistung und Wirkungsgrad

Wenn man das Klemmenverhalten eines aktiven Zweipols untersucht, so erhält man Informationen über den Verlauf von Strom und Spannung. Wertet man die Strom- und Spannungskennlinien aus, so erhält man wiederum Informationen über die Schaltung. Für eine grafische Darstellung sollte man die Größen U, I und R normieren. Dabei ist es sinnvoll, dass man diese auf konstante Größen des Grundstromkreises normiert. Im Grundstromkreis sind drei Belastungsfälle möglich: Anpassung, Kurzschlussbetrieb und Leerlaufbetrieb.

Kapitel 11

Grundstromkreis



1. Anpassung: $R_a/R_1 = 1$. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, schneiden sich die beiden Widerstandskennlinien.

2. Kurzschlussbetrieb: Ein Kurzschlussbetrieb liegt dann vor, wenn : $0 \leq \frac{R_a}{R_i} \leq 1$. Dies bedeutet aber nicht, dass die Klemmen widerstandslos überbrückt werden. Vielmehr gilt: $R_i \gg R_a$ (Widerstandsbedingungen). Ein ähnliches Verhalten weist eine Konstantstromquelle auf. Bei einer graphischen Darstellung befindet sich der Kurzschlussbetrieb links von der Anpassung, deswegen spricht man auch von einer Unteranpassung.

3. Leerlaufbetrieb: Ein Leerlaufbetrieb liegt dann vor, wenn $0 \geq R_a/R_i \geq 1$. Leerlauf bedeutet aber nicht nur offene Klemmen, sondern vielmehr gilt: $R_i \ll R_a$ (Widerstandsbedingung). Ein ähnliches Verhalten weist eine Konstantspannungsquelle auf. Bei einer graphischen Darstellung befindet sich der Leerlaufbetrieb rechts von der Anpassung, deswegen spricht man auch von einer Überanpassung.

11.1 Leistungsumsatz

Der Leistungsumsatz ist abhängig von Strom und Spannung. Bei einem Kurzschluss fließt der maximal mögliche Strom, aber es fällt keine Spannung über R_a ab. Damit wird keine Leistung im Widerstand umgesetzt: $P_a = u_a \cdot I$. Bei einem Leerlauf liegt die maximal mögliche Spannung an, aber es fließt kein Strom mehr ($R_a > \infty$). Damit wird im Widerstand R_a keine Leistung umgesetzt.

Alle technisch sinnvollen Betriebsfälle liegen zwischen Leerlauf und Kurzschluss. Damit gibt es einen definierten Leistungsumsatz im Lastwiderstand und der Leistungsumsatz ist unabhängig von den Größen des Lastwiderstandes. Für den Leistungsumsatz im Grundstromkreis gilt:

$$0 = P_i + P_a - P_{ges}$$

$$P_{ges} = P_i + P_a$$

mit $P_i = I^2 \cdot R_i$ → innere Verlustleistung

$P_a = I^2 \cdot R_a$ → äußere Verlustleistung

$P_{ges} = I^2 (R_i + R_a) = u_q \cdot I$ → benötige Gesamtleistung

11.2 Wirkungsgrad

Der Wirkungsgrad ist der Leistungsumsatz bezogen auf die von der Quelle zugeführte Leistung:

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}}$$

Der Wirkungsgrad einer schaltungstechnischen Anordnung ist das Verhältnis von der im Lastwiderstand umgesetzten Leistung zu der durch die Quelle zugeführten Leistung. Für eine reale Spannungsquelle gilt:

$$\eta_u = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} = \frac{u_a \cdot I}{u_q \cdot I} = \frac{(R_a \cdot I^2)I}{\big((R_a + R_i)I^2\big)I} = \frac{R\_a}{R_a + R_i}$$

Für eine reale Stromquelle gilt:

$$\eta_i + I = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} = \frac{u \cdot I_a}{u \cdot I_k} = \frac{R_i}{R_a + R_i}$$

Weiterhin gilt:

$$\eta_u + \eta_i = \frac{R_a}{R_a + R_i} + \frac{R_i}{R_a + R_i} = 1$$

Die Wirkungsgrade einer realen Spannungs- und einer realen Stromquelle ergänzen sich zu einer 100% idealen Quelle. Weiterhin gilt: eine gute Spannungsquelle ist eine schlechte Stromquelle und umgekehrt. Es sit zu eachten, dass eine jede Spannungsquelle als Stromquelle aufgefasst werden kann und umgekehrt, es ändert sich lediglich der Wirkungsgrad der Gesamtanordnung.

11.3 Leistungsanpassung

In der Nachrichten- oder Datentechnik wird ein maximaler Leistungsumsatz im Lastwiderstand gewünscht. Der Leistungsverlauf weist, wenn man den Lastwiderstand variiert, ein Maximum auf. Es handelt sich aber nur um ein Maximum, wenn der Anstieg der Funktion gleich Null ist. Es gilt:

$$P_a = I^2 \cdot R_a = \frac{{u_q}^2 \cdot R_a}{(R_i + R_a)^2}$$

Damit ist der Anstieg dP_a/dR_a:

$$\frac{dP_a}{dR_a} = \frac{{u_q}^2 (R_i + R_a)^2 - u_q^2 \cdot R_a \cdot 2(R_i + R_a)}{(R_i + R_a)}$$

$$\frac{dP_a}{dR_a} = 0$$

$$\hookrightarrow u_q^2 \, (R_i + R_a)^2 = u_q^2 \cdot R_a \cdot 2(R_i + R_a)$$

$$R_i + R_a = 2R_a$$

$$R_i = R_a$$

Meist ist die maximale Leistungsentnahme dann gewährleistet, wenn der Lastwiderstand an den Innenwiderstand der Quelle angepasst wird. Bei einem maximalen Wirkungsgrad hängt der Belastungsfall nicht vom Absolutwert des Verbraucherwiderstandes R_a ab, sondern vom Verhältnis R_a/R_i. Dabei muss der Wirkungsgrad dargestellt werden:

$$\eta = f\left(\frac{R_a}{R_i}\right)$$

Ziel ist es, sich einem Wirkungsgrad von eins zu nähern, dabei nähert sich der Bruch bei größeren Widerständen asymptotisch gegen eins.

Kapitel 12

Vorteile des Wechselstroms gegenüber dem Gleichstrom

Die Hauptvorteile des Wechselstromes liegen bei der verlustarmen Übertragung großer Leistungen über weite Strecken durch leichte Transformierbarkeit. Bei einem Herabsetzen der Stromstärke sind die Verluste durch Stromwärme in den Leitungen gering $(P_v = I^2 \cdot R)$.

Im Regelfall nutzt man sinusförmige Wechselströme, die z.B. von Generatoren geliefert werden. Alle Wechselströme mit einer anderen Schwingungsfunktion verursachen in nichtohmschen Widerständen unerwünschte Oberwellen. Reine sinusförmige Ströme verursachen dagegen nur Phasenverschiebungen.

Bisher wurden nur zeitlich konstante Wechselströme betrachtet, allerdings gibt es in der Elektrotechnik noch andere Funktionen der Zeit. Diese kann man anschaulich in einem Liniendiagramm darstellen. Dabei wird jedem Zeitwert t ein Momentanwert x_i zugeordnet. Diese Darstellung kann auch mit Hilfe eines Elektronenstrahlozilloskop erfolgen. Ändern sich die zeitlich veränderlichen Größen, so sind auch andere Erscheinungen zu erwarten. Die Größen und deren bewirkte Änderungen sind: die kapazitive Wirkung, erzeugt dielektrischen Verschiebestrom, induktive Wirkung, erzeugt elektromagnetische Induktion und nichtlineare Bauelemente, die Oberschwingungen erzeugen.

In der Computertechnik, der Kommunikationstechnik, der Regelungstechnik und im Maschinenbau treten elektrische Größen mit beliebigen zeitlichem Verlauf auf. Zeitabhängige Größen in periodische und nichtperiodische Größen unterteilen. Es werden aber nur periodische Größen betrachtet.

Kapitel 13

Periodische Größen

Der Momentanwert x_i einer periodischen Größe $x(t)$ wiederholt sich immer wieder nach einem Zeitintervall T. Es gilt: $x(t+nT) = x(t); n \in N$

Kennwerte periodischer Funktionen sind:

Periodendauer T	Zeitintervall, nachdem sich die Funktion wiederholt
Frequenz f	Kehrwert der Periodendauer und gibt an, wie oft sich der Vorgang in einer Zeiteinheit wiederholt.

$$f = \frac{1}{T} [f] = \frac{1}{s} = 1\ Hz\ [Hertz]$$

Scheitelwert x_{max}	Innerhalb einer Periode auftretender Maximalwert $x_{max} = \hat{x}$. Auch Spitzenwert genannt.
Minimalwert x_{min}	Innerhalb einer Periode auftretender Minimalwert $x_{min} = \hat{x}$.
Spitze-Spitze-Wert	Differenz zwischen Maximal- und Minimalwert $x_{ss} = x_{max} - x_{min}$.

Periodische Größen können Mischgrößen, Wechselgrößen oder Gleichgrößen bzw. Gleichwerte sein:

Mischgrößen sind periodische Größen, deren Momentanwert sich nach Betrag oder Vorzeichen ändert. Eine Mischgröße entsteht aus der Überlagerung von Wechselgrößen und Gleichgrößen. Es gilt: $x = x_{\sim} + x_0$, x_0 ist der Gleichanteil einer Wechselgröße.

Wechselgrößen	sind periodische Größen, deren Momentanwert sich nach Betrag und Vorzeichen ändert und deren arithmetischer Mittelwert gleich Null ist. Dabei ist jeder Kurvenverlauf möglich. Die Flächen im positiven und negativen Bereich unterhalb der Kurve sind gleich groß.
Gleichgrößen	sind Größen, deren Momentanwert immer konstant ist.

Zum Vergleich von periodischen Größen benötigt man eine zeitinvariante Größe. Dies kann z.B. der Arithmetische Mittelwert sein. Es gilt, mit t_i als beliebigen Anfangswert des Integrationsvalls T:

$$\hat{x} = \frac{1}{T} \int_{t}^{t+T} x(t)\, dt$$

Er bildet den Flächeninhalt unter der Kurve $x = f(t)$ auf einer Rechteckfläche ab. Die Höhe des Rechteckes ist der Gleichwert der periodischen Funktion. Bei reinen Wechselgrößen ist der Mittelwert nicht aussagefähig. Erst muss die negative Halbwelle durch eine Gleichrichterschaltung in eine positive Welle umgewandelt werden. Danach kann der Gleichrichtwert gebildet werden.

$$|\hat{x}| = \frac{1}{T} \int_{t}^{t+T} |x(t)|\ dt$$

13.1 Effektivwert

Wenn in einem Stromkreis ein Strom fließt, so ist dies mit einem Energieumsatz verbunden. Der Energieumsatz ist unabhängig von der Stromrichtung: $P = i^2 \cdot R.$ Der quadratische Mittelwert wird dann als Effektivwert bezeichnet:

$$x_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} x(t)dt}$$

13.2 Physikalische Interpretation

Durch einen zeitlich veränderlichen Strom oder Spannung entsteht ein periodischer Ladungstransport. Dabei ist der Leistungsumsatz am Verbraucher abhängig von der Stromrichtung. Der Energieumsatz wird in zeitlichen Mittel über eine Periode mit einer Gleichgröße verglichen. Daher können wir festlegen: Der Effektivwert eines Wechselstromes erzeugt an einem ohm´schen Widerstand die gleiche Wärmemenge wie ein äquivalenter Gleichstrom. Er ist Grundlage für die Bemessung elektrischer Anlagen. Die Betriebsmittel müssen für die zu erwartende Erwärmung ausgelegt sein.

13.3 Bewertungsgrößen

Scheitelfaktor k_s — Verhältnis des Scheitelwertes zum Effektivwert einer Wechselgröße. Daraus lässt sich der Abstand der beiden Werte ableiten. Dies ist bei Isolationsanlagen der Hochspannungstechnik von Bedeutung.

$$k_s = \frac{\hat{x}}{x_{eff}}$$

Formfaktor k_f — Verhältnis des Effektivwertes zum Gleichrichtwert einer Wechselgröße. Damit ist es möglich, die Kurvenform einer Wechselgröße zu beurteilen. Er wird auch als Umrechnungsfaktor zwischen dem angezeigten Messwert und dem Effektivwert der Wechselgröße genutzt.

$$k_f = \frac{x_{eff}}{|\hat{x}|}$$

Schwingungsgehalt s — Verhältnis des Effektivwertes des Wechselanteils zum Gesamteffektivwert einer Mischgröße. Gibt den Anteil der reinen Wechselgröße an der Mischgröße wieder.

$$s = \frac{x_{\sim}}{x_{eff}}$$

Welligkeit w — Verhältnis des Effektivwertes des Wechselanteilszum Gleichwert einer Wechselgröße. Sie gibt den Restwechselspannungsanteil einer gleichgerichteten Wechselgröße an und gibt damit eine Aussage über die Größe der Gleichrichtung.

$$w = \frac{x_{\sim}}{|\hat{x}|}$$

13.4 Sinusförmiger Wechselstrom

Sinusförmiger Wechselspannungen mit dem Momentanwert u_t und sinusförmige Wechselströme mit dem Momentanwert i_t sind periodische Funktionen der Zeit mit dem arithmetischen Mittel gleich Null. Diese Größen bezeichnet man auch als harmonische Größen. Sie sind bedeutsam wegen ihrer einfachen mathematischen Beschreibung und der einfachen Erzeugung. Sinusförmige Spannungen und Ströme gibt es n jedem linearen Netzwerk.

Da der Sinus eine Grundfunktion ist, gibt es keine zusätzlichen Schwingungsanteile. Ein Differenzieren führt immer wieder auf die Sinusfunktion zurück. Nichtsinusförmige periodische Größen kann man mit einer Fourieranalyse als Summe von Sinusschwankungen darstellen.

Bei einer mathematischen Handhabung gilt allgemein: $a = \hat{a} \cdot \sin \varphi$, wobei a der Momentanwert ist, $\hat{a}$ der Scheitelwert und φ der Phasenwinkel.

Die Funktionswerte der Sinusfunktion kann man in aus dem Einheitskreis m in ein kartesisches Koordinatensystem projizieren: $a = f(\varphi)$. Eine Multiplikation mit $\hat{a}$ vergrößert den Radius. Führt P eine gleichförmige Drehbewegung auf der Kreisbahn aus, so gilt: $\varphi = \omega t$, mit ω als Kreisfrequenz. Damit ist der Phasenwinkel von der Zeit abhängig. Für eine volle Drehbewegung gilt dann: $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ und $a = \hat{a} \cdot \sin \omega t$. Besitzt die Sinusschwingung zum Zeitpunkt $t = 0$ einen Momentanwert, so gilt:

$$a = \hat{a} \sin(\omega t + \varphi_0) = \hat{a} \sin(2\pi f t + \varphi_0)$$

Eine Sinusgröße wird durch die Amplitude, die Frequenz und den Nullphasenwinkel vollständig beschrieben. Im Fall einer Wechselgröße wählt man $\varphi_0 = 0$. Bei mehreren Wechselgrößen mit unterschiedlichen Nullphasenwinkeln muss man diese auf $\varphi_0 = 0$ beziehen. Dies bezeichnet man als Phasenverschiebung. Dabei muss, wenn $\varphi_0 > 0$ ist, $a > 0$ für $t = 0$ sein und umgekehrt. Zur einfachen mathematischen Behandlung wird oft die Kosinusfunktion genutzt.

$$a = \hat{a} \cdot \cos \omega t = \hat{a} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

13.5 Frequenzfunktion

Es ist unübersichtlich mehrere Sinusgrößen mit einer unterschiedlichen Frequenz in einem Liniendiagramm darzustellen. Deshalb verwenden wir hierfür die Frequenzfunktion mit den Kenngrößen:

$$f(t) \begin{cases} Amplitude\ e \\ Nullphasenwinkel\ \varphi_0 \end{cases}$$

Wenn in einer elektrischen Schaltung mehrere zeitabhängige Spannungen und Ströme auftreten, so gelten zu jedem Zeitpunkt die Kirchhoffschen Sätze. Die Momentanwerte überlagern sich zu einer resultierenden Größe. In einem linearen Netzwerk entsteht zu jedem Zeitpunkt eine Gesamtgröße aus der Summe der Einzelgrößen. Dies bezeichnet man als Überlagerung oder Superposition.

Kapitel 14

Zeigerbild

In Liniendiagrammen ist die Darstellung mehrerer elektrischer Größen unübersichtlich. Deswegen bietet sich die Darstellung als Zeigerdiagramm an. Der Zeiger beginnt am Kreismittelpunkt und endet am Punkt P. Die Rotation des Zeigers mit ω führt auf das Liniendiagramm. Die Zeiger besitzen nur einen symbolischen Charakter und werden nur für harmonische Größen verwendet. Der Zeiger stellt immer den Augenblickswert einer Größe dar.

Zeigerdarstellung einer harmonischen Größe erfolgt immer durch Unterstreichung. Die Kenngrößen für einen umlaufenden Zeiger sind: die Amplitude, dargestellt durch die Länge des Zeigers, die Nullphase, dargestellt als Lage des Zeigers zur Bezugsachse und die Frequenz, dargestellt als Rotationsgeschwindigkeit des Zeigers.

Treten alle Größen in einem Netzwerk mit gleicher Frequenz auf, so besitzen alle Zeiger die gleiche Rotationsgeschwindigkeit. Die relative Lage der Zeiger zueinander bleibt gleich. Es ist möglich, die Rotation wegzulassen. Als weitere Darstellungsarten gibt es den Maximalwertzeiger, der nur für Sinusgrößen definiert ist und der Effektivwertzeiger, der durch Division mit $\sqrt{2}$ entsteht. Festzuhalten bleibt, dass die Zeigerdarstellung anschaulich die Strom-Spannungsverhältnisse darstellt.