1. Grundbegriffe der Stochastik

Ω Raum der Ereignisse. Die einelementigen Teilmengen $\{\omega\}$ heißen auch Elementarereignisse.
Das Ereignis A tritt ein, wenn ein $\omega \in A$ eintritt.
$\mathcal{A}$ ist ein geeignetes System von Teilmengen A von Ω.

$\triangleright$ Operationen mit Ereignissen $A, B, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$
$A \cup B$ Ereignis A oder B tritt ein
$A \cap B$ Ereignisse A und B treten ein
$A \backslash B$ Ereignis A tritt ein, nicht aber B
$A \subset B$ Ereignis B schließt A ein
$\bigcup_{i=1}^n A_i$ mindestens eines der Ereignisse A_i tritt ein
$\bigcap_{i=1}^n A_i$ alle A_i treten ein
$\Omega \backslash A = \bar{A}$ das zu A komplementäre Ereignis, tritt ein, wenn A nicht eintritt.
$A \cap B = \emptyset$ bedeutet Ereignisse A und B sind *unvereinbar*.

Axiome: $P(A)$ heißt Wahrscheinlichkeit des zufälligen Ereignisses, falls
(1) Für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt: $0 \le P(A) \le 1$.
Wahrscheinlichkeiten liegen zwischen 0 und 1.
(2) $P(\Omega) = 1$.
(3) Für unvereinbare Ereignisse $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ ($A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$) gilt:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

allgemeiner: für alle unvereinbaren Ereignisse $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{A}$ gilt:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = \sum_{i=1}^\infty P(A_i).$$

$\triangleright$ Daraus lassen sich weitere Formeln ableiten:
(4) $P(\emptyset) = 0$
(5) Unter der Voraussetzung $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
(6) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
(7) Unter der Voraussetzung $A \subset B \Longrightarrow P(A) \le P(B)$
(8)
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(9) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
(10) $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$

DEFINITION: Es seien $A, B \in \mathcal{A}$ mit $P(B) > 0$. Dann heißt

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

die *bedingte Wahrscheinlichkeit* von A unter der Bedingung B.

- Formeln:

$$P(\bar{A} \mid C) = 1 - P(A \mid C), \qquad P(A \mid C) = P(A \cap B \mid C) + P(A \cap \bar{B} \mid C)$$

DEFINITION: Die Ereignisse A und $B \in \mathcal{A}$ heißen unabhängig, wenn $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$\triangleright$ A und B sind genau dann unabhängig, wenn $P(A \mid B) = P(A)$.

Formel der totalen Wahrscheinlichkeit - Bayessche Formel

$\triangleright$ Gegeben seien Ereignisse $A, B \in \mathcal{A}$.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \mid B) \cdot P(B) + P(A \mid \bar{B}) \cdot P(\bar{B}) \\ P(B \mid A) &= \frac{P(A \mid B) P(B)}{P(A)} \end{aligned}$$

$\triangleright$ Gegeben seien Ereignisse $A, B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{A}$, $P(B_i) > 0$.
Die B_i bilden ein vollständiges System von Ereignissen: $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$, d.h. die B_i sind unvereinbar und schöpfen alle Möglichkeiten in Ω aus. Das bedeutet, dass genau ein B_i immer eintritt.

Formel der totalen Wkt.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) P(B_i)$$

Bayessche Formel

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i) P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_i) P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j) P(B_j)}$$

2. Zufallsgrößen

Diskrete Zufallsgrößen

Verteilungstabelle:

Wert	x_1	x_2	$\ldots$	x_r
Wahrscheinlichkeit	p_1	p_2	$\cdots$	p_r

evtl. unendlich viele Werte

$$p_i = P(X = x_i)$$

Bedingungen:

$$0 < p_i < 1, \quad \sum_{i=1}^{r} p_i = 1$$

$\triangleright$ oft ist $x_i = i$

Dann Formel für Wahrscheinlichkeiten:

$$P(m \leq X \leq l) = \sum_{i=m}^{l} p_i$$

Diskrete Verteilungen

Verteilung	Parameter	Einzelwktn.
		p_i
Gleichverteilung	$n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n} \quad (i = 1 \ldots n)$
Poisson-Verteilung	$\lambda > 0$	$\dfrac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \quad (i = 0, 1, \ldots)$
Binomialverteilung	$n \in \mathbb{N}, p \in (0,1)$	$\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad (i = 0, \ldots, n)$
hypergeometrische Verteilung	$N, M, n \in \mathbb{N}$ $N \geq M, n \leq N$	$\dfrac{\binom{M}{i}\binom{N-M}{n-i}}{\binom{N}{n}} \quad (i = q, \ldots, r)$
geometrische Verteilung	$p \in (0,1)$	$(1-p)^{i-1} p \quad (i = 1, 2, \ldots)$

Verteilung	Erwartungswert $E(X)$	Varianz $\mathrm{Var}(X)$
Gleichverteilung	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{1}{12} n^2 - \frac{1}{12}$
Poisson-Verteilung	λ	λ
Binomialverteilung	np	$np(1-p)$
hypergeometrische Verteilung	$\dfrac{Mn}{N}$	$\dfrac{Mn(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$
geometrische Verteilung	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$

$q = \max\{0, n+M-N\},\ r = \min\{M, n\}$

Kenngrößen diskreter Verteilungen

Erwartungswert:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{r} x_i p_i$$

Varianz (Streuung):

$$\operatorname{Var}(X) = \sum_{i=1}^{r} (x_i - E(X))^2 p_i = \sum_{i=1}^{r} x_i^2 p_i - (E(X))^2$$

Standardabweichung: $\sigma(X) = \sqrt{\operatorname{Var}(X)}$

Stetige Zufallsgrößen

▷ *Verteilungsfunktion*:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

• Eigenschaften der Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsgröße:

(a)

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$

(b) F ist monoton wachsend, d.h. $F(x) \leq F(y)$ für $x < y$.

(c) F ist stetig, d.h.

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0) \quad \text{für alle } x_0.$$

▷ *Wahrscheinlichkeitsdichte* (Dichtefunktion) der Zufallsgröße:

$$f(x) = F'(x)$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} P(a \ &\leq \ X \leq b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \\ P(X \ &\leq \ a) = \int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) \\ P(X \ &\geq \ b) = \int_b^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 - F(b) \end{aligned}$$

Das Argument x, für das $f(x)$ maximal wird, heißt *Modalwert*.

▷ Eine Funktion f ist Dichte einer Zufallsgröße, falls

$$1)\ f(x) \geq 0, \quad 2)\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Stetige Verteilungen

Verteilung	Parameter	Dichtefunktion
		$f(x)$
Gleichverteilung auf $[a,b]$	$a, b \in \mathbb{R}, a < b$	$\frac{1}{b-a} \quad (x \in [a,b])$
Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$
Exponentialverteil. $\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\lambda > 0$	$\lambda e^{-\lambda x} \quad (x > 0)$
Gammaverteilung	$p, \lambda > 0$	$\frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\lambda x} \quad (x > 0)$
χ^2-Verteilung n Freiheitsgrade	$n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2} \quad (x > 0)$
Weibullverteilung	$\beta, \lambda > 0$	$\lambda\beta x^{\beta-1} e^{-\lambda x^\beta} \quad (x > 0)$
logarithmische Normalverteilung	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left(-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (x > 0)$
t-Verteilung n Freiheitsgrade	$n \in \mathbb{N}$	$\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} \quad (x \in \mathbb{R})$

$\exp(x)$ bedeutet e^x

- Normalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ ist die standardisierte Normalverteilung

Φ ist Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung →Tabelle

Verteilung	Verteilungs-funktion $F(x)$	Erwartungswert $E(X)$	Varianz $\mathrm{Var}(X)$
Gleichverteilung $[a,b]$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Normalverteilung	$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$	μ	$\sigma^2 > 0$
Exponentialverteilung	$1 - e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Gammaverteilung	nicht explizit	$\frac{p}{\lambda}$	$\frac{p}{\lambda^2}$
Weibullverteilung	$1 - \exp(-\lambda x^\beta)$	$\frac{1}{\lambda^{1/\beta}}\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$	$\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2}{\lambda^{2/\beta}}$
χ^2_n-Verteilung	nicht explizit	n	$2n$
logarithmische Normalverteilung	$\Phi\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)$	$e^{\mu+\sigma^2/2}$	$e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$
t_n-Verteilung	nicht explizit	0	$\frac{n}{n-2}$

- $\Gamma(p)$ ist Gammafunktion →Tabelle, $\Gamma(m) = (m-1)!$ für $m \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi},\ \Gamma(1) = 1,\ \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},\ \Gamma(2) = 1,\ \Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

$\triangleright$ Wahrscheinlichkeiten der Normalverteilung: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{aligned} P(X &\leq a) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right), \quad P(X \geq b) = 1 - \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right), \\ P(a &\leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right), \end{aligned}$$

Beachte: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ für alle x, $\quad \Phi(0) = 0.5$

SATZ: Ist $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, dann $Y = aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

Kenngrößen stetiger Verteilungen

Erwartungswert:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \, \mathrm{d}x$$

Varianz:

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) \, \mathrm{d}x - (E(X))^2 \end{aligned}$$

Standardabweichung:

$$\sigma(X) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) \, \mathrm{d}x}$$

Schiefe: $\quad \delta(X) = \dfrac{\int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^3 f(x) \, \mathrm{d}x}{\sqrt{(\operatorname{Var}(X))^3}}$

• $\delta(X) > 0$ bedeutet rechtsschiefe Verteilung, Modalwert liegt i.A. links neben $E(X)$
$\delta(X) < 0$ bedeutet linksschiefe Verteilung, Modalwert liegt i.A. rechts neben $E(X)$
$\delta(X) = 0$ symmetrische Verteilung

• Schiefe spezieller Verteilungen: Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \to \delta(X) = 0$
Exponentialverteilung $\operatorname{Exp}(\lambda) \to \delta(X) = 2$

DEFINITION: Eine Zahl q_α heißt *Quantil der Ordnung* α der stetigen Zufallsgröße X mit der Verteilungsfunktion F, falls

$$F(q_\alpha) = \alpha$$

Dies bedeutet:

$$P(X \leq q_\alpha) = \int_{-\infty}^{q} f(x) \, \mathrm{d}x = \alpha$$

• *Median*: $m = q_{0.5}$

$$P(X \leq m) = P(X > m) = 0.5$$

• λ_α Quantil der Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$,
$t_{n;\alpha}$ Quantil der t_n-Verteilung,
$\chi^2_{n;\alpha}$ Quantil der χ^2_n-Verteilung

Unabhängigkeit von Zufallsgrößen

Definition: Zwei Zufallsgrößen X und Y heißen *unabhängig*, falls gilt:

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)\, P(Y \in B)$$

für alle Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$.

• für stetige Zufallsgrößen

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)\, P(Y \leq y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

• für diskrete Zufallsgrößen

$$P(X = i, Y = j) = P(X = i) P(Y = j) \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$$

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten und Kenngrößen

$\triangleright$ Seien X, Y zwei Zufallsgrößen. Dann gilt für reelle Zahlen a, b:

(1) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
(2) $E(aX) = aE(X)$
(3) $E(XY) = E(X)\, E(Y)$, falls X und Y unabhängig
(4) $\operatorname{Var}(X) = E(X - E(X))^2 = EX^2 - (EX)^2$
(5) $\operatorname{Var}(aX) = a^2 \operatorname{Var}(X)$
(6) $\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y)$, falls X und Y unabhängig
(7) $\operatorname{Var}(X) = 0 \Longleftrightarrow P(X = a) = 1$ für ein a.

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= aE(X) + b \\ \operatorname{Var}(aX+b) &= a^2 \operatorname{Var}(X) \qquad (a, b \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Stetige Zufallsvektoren

(X, Y) zweidimensionaler stetiger Zufallsvektor, Paar zweier Zufallsgrößen
Verteilungsfunktion:

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

monoton wachsend in jedem Argument

Verteilungsdichte:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y)$$

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(u,v) \,\mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

• Eine Funktion f ist Dichte von (X,Y), falls

$$1)\ f(x,y) \geq 0, \quad 2)\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \,\mathrm{d}x \mathrm{d}y = 1$$

• Formel für Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} P(a &\leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x,y) \,\mathrm{d}y \mathrm{d}x \\ &= F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c) \end{aligned}$$

• Randverteilungen F_X und F_Y von X bzw. Y:

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F(x,y), \quad F_Y(y) = \lim_{x \to \infty} F(x,y).$$

Für die Randdichten f_X und f_Y gilt:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \,\mathrm{d}y, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \,\mathrm{d}x$$

Satz: Die beiden Zufallsgrößen X, Y mit der gemeinsamen Dichte $f(x,y)$ sind genau dann unabhängig, wenn

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y).$$

▷ Beispiel zweidimensionale Normalverteilung mit Parametern $\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \\ &\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right)\right) \end{aligned}$$

Randverteilungen $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2), \quad Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

▷ *Korrelationskoeffizient*

$$\rho = \operatorname{corr}(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)\operatorname{Var}(Y)}}$$

mit $\operatorname{cov}(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x,y) \,\mathrm{d}x \mathrm{d}y - E(X)E(Y)$. Es gilt: $-1 \leq \rho \leq 1$.

3. Einführung in die Statistik

Grundlegendes Modell:	in den Anwendungen:
unabhängige Zufallsgrößen $X_1, \dots, X_n$	konkrete reale Ausprägungen $X_1, \dots, X_n$
mit Verteilungsfunktion F bzw.	Zahlenwerte, Werte von Vektoren,
Einzelwktn. $p_1, \dots, p_r$	qualitative Größen

• Vorgegeben Daten $X_1, \dots, X_n$. sortierte Daten $\rightarrow$ *Variationsreihe* $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ mit

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}.$$

DEFINITION: Die relative Häufigkeit des Ereignisses $X_i \leq x$ ergibt die *empirische Verteilungsfunktion* an der Stelle x:

$$F_n(x) = \frac{\#\{i : X_i \leq x\}}{n} = \frac{\text{Anzahl der } X_i \text{ mit } X_i \leq x}{n}$$

$\triangleright$ *Histogramm*
Wir teilen $\mathbb{R}$ bzw. den Grundbereich in mehrere disjunkte Intervalle ein: $I_1, I_2, \dots, I_k$; $\bigcup_{j=1}^k I_k = \mathbb{R}$.
H_j Anzahl der Stichprobenelemente im Intervall I_j mit Breite λ_j
Über jedem Intervall I_j ($j \in \{1, \dots, k\}$) werden Balken der Breite λ_j in das Diagramm eingetragen. Die Höhe dieser Balken beträgt entweder die absolute Häufigkeit H_j oder die relative Häufigkeit $h_j = \frac{H_j}{n}$.

$\triangleright$ *Stichprobenmittel (Mittelwert)*

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Empirischer Median

$$m_X = \begin{cases} X_{(N)} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}X_{(L)} + \frac{1}{2}X_{(L+1)} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases} \qquad N = \frac{n+1}{2}, L = \frac{n}{2}$$

Stichprobenvarianz

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right)$$

Standardabweichung

$$S_X = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}$$

Variationskoeffizient

$$V_X = \frac{S_X}{\bar{X}}$$

Schiefe:

$$d_X = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^3}{S_X^3}$$

- *empirisches α-Quantil:*

$$\hat{q}_\alpha = \begin{cases} X_{(N)} \text{ für } \alpha n \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}X_{(\alpha n)} + \frac{1}{2}X_{(\alpha n+1)} \text{ für } \alpha n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

wobei sich N durch Aufrunden von αn auf die nächstgrößere ganze Zahl ergibt.
Quartilsabstand: $\hat{q}_{0.75} - \hat{q}_{0.25}$

4. Punktschätzungen

- Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ unabhängiger Zufallsgrößen

X_i hat Verteilungsfunktion F.
$E(X_i) = \mu, \quad \mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$

Satz: Bei $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ besitzt $\bar{X}_n$ eine $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$-Verteilung. Ist X_i nicht normalverteilt, dann nähert sich asymptotisch ($n \to \infty$) die Verteilung von $\bar{X}_n$ einer $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$-Verteilung.

- $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Longrightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi_n^2$$

Satz: $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Longrightarrow \frac{n-1}{\sigma^2}S_n^2$ besitzt eine χ_{n-1}^2-Verteilung.

<u>Maximum-Likelihood-Schätzer</u>

zu bestimmen sind Schätzer für die Parameter $\vec{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ einer beliebigen stetigen Verteilung mit Dichte $f_{\vec{\theta}}(x)$, Θ Parametermenge
Likelihoodfunktion:

$$L(x_1, \ldots, x_n \mid \vec{\theta}) = f_{\vec{\theta}}(x_1) f_{\vec{\theta}}(x_2) \ldots f_{\vec{\theta}}(x_n)$$

Definition: Wir nennen $\hat{\theta}$ einen *Maximum-Likelihood-Schätzer* für den Parameter

$\vec{\theta}$, falls die Likelihood-Funktion für $\hat{\theta}$ maximal wird.

$$L(X_1, \ldots, X_n \mid \hat{\theta}) = \max_{\vec{\theta} \in \Theta} L(X_1, \ldots, X_n \mid \vec{\theta}).$$

- Bestimmung der Schätzer:
  1) Logarithmieren von L
  2)
$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln L(x_1, \ldots, x_n \mid \theta) = 0 \quad \forall i = 1 \ldots k,$$

Schätzer für spezielle Verteilungen

- Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\hat{\mu} = \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \hat{\sigma}^2 = S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2$$

- Exponentialverteilung mit Parameter λ

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}_n} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}$$

- Poissonverteilung mit Parameter λ

$$\hat{\lambda} = \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Binomialverteilung mit Parameter p und vorgegebenem Parameter N

$$\hat{p} = \frac{1}{nN} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

5. Konfidenzbereiche

Gegeben Stichprobe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängiger Zufallsgrößen, Grundgesamtheit X
$\bar{X}_n$ Mittelwert, S_n^2 Stichprobenvarianz
Konfidenzniveau $\varepsilon = 1 - \alpha$

- $Z \sim \chi^2_n$, $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, X und Z unabhängig. Die Zufallsgröße

$$Y = \frac{X}{\sqrt{\frac{Z}{n}}}$$

besitzt dann eine *t-Verteilung mit n Freiheitsgraden* ($n \geq 1$, Symbol: $Y \sim t_n$).

- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
  Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ bei bekannter Varianz σ^2

$$J = \left[\bar{X}_n - \lambda_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}_n + \lambda_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$$P(\mu \in J) = 1 - \alpha$$

Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ bei unbekannter Varianz σ^2

$$J = \left[\bar{X}_n - t_{n-1;1-\alpha/2} \cdot \frac{S_n}{\sqrt{n}},\ \bar{X}_n + t_{n-1;1-\alpha/2} \cdot \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right]$$

$$P(\mu \in J) = 1 - \alpha$$

Konfidenzintervalle für die Varianz σ^2

zweiseitig: $J = \left[\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}},\ \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}}\right]$

einseitig: $J = \left(0,\ \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1;\alpha}}\right]$

$$P(\sigma^2 \in J) = 1 - \alpha$$

6. Statistische Tests

Stichprobe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängiger Zufallsgrößen
Verteilung mit Parameter θ,
Θ Parametermenge, $\theta \in \Theta$

• *Nullhypothese* $H_0 : \theta \in \Theta_0$.
$H_1 : \theta \in \Theta_1$, Θ_1 Teilmenge von $\Theta \backslash \Theta_0$, heißt *Alternativhypothese*.

▷ Schritte beim statistischen Test:
1) Nullhypothese H_0, Alternativhypothese H_1,
Voraussetzungen, Signifikanzniveau α
2) Auswahl des Tests, Berechnung der Testgröße T
3) Entscheidung zur Ablehnung/Nichtablehnung der Nullhypothese

	Wahrer	Sachverhalt
Entscheidung	H_0 richtig und H_1 falsch	H_0 falsch und H_1 richtig
H_0 wird nicht abgelehnt, $T \notin K^*$	richtige Entscheidung	Fehler 2. Art
H_0 wird abgelehnt $T \in K^*$	Fehler 1. Art	richtige Entscheidung

K^* kritischer Bereich der Testgröße
▷ *Signifikanztest*:

$$P\left(T \in K^*\right) \leq \alpha \quad \text{für } \theta \in \Theta_0$$

Signifikanzniveau α

Tests für normalverteilte Grundgesamtheiten

im Folgenden $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Gauß-Test

σ^2 bekannt, μ_0 vorgegeben
Hypothese: a) $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$
b) $H_0 : \mu \leq \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$
c) $H_0 : \mu \geq \mu_0$, $H_1 : \mu < \mu_0$
Testgröße:

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$$

Testentscheidung: H_0 wird also abgelehnt, falls:
a) $|T| > \lambda_{1-\alpha/2}$, b) $T > \lambda_{1-\alpha}$, c) $T < \lambda_\alpha$, wobei $\lambda_\alpha = -\lambda_{1-\alpha}$.

t-Test

σ^2 unbekannt, μ_0 vorgegeben

Hypothese: a) $H_0 : \mu = \mu_0, \;\; H_1 : \mu \neq \mu_0$

b) $H_0 : \mu \leq \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$

c) $H_0 : \mu \geq \mu_0$, $H_1 : \mu < \mu_0$

Testgröße:

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n}\sqrt{n}$$

Testentscheidung: H_0 wird abgelehnt, falls:

a) $|T| > t_{n-1;1-\alpha/2}$, b) $T > t_{n-1;1-\alpha}$, c) $T < t_{n-1;\alpha}$, wobei $t_{n-1;\alpha} = -t_{n-1;1-\alpha}$.

<u>Varianz-Test</u>

σ_0^2 vorgegeben

Hypothese: a) $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2, \;\; H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

b) $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$, $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$

c) $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$, $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$

Testgröße:

$$T = (n-1)\frac{S_n^2}{\sigma_0^2}$$

Testentscheidung: H_0 wird also abgelehnt, falls:

a) $T > \chi^2_{n-1;1-\alpha/2}$ oder $T < \chi^2_{n-1;\alpha/2}$ b) $T > \chi^2_{n-1;1-\alpha}$, c) $T < \chi^2_{n-1;\alpha}$.

• Nun zwei Stichproben

1. Stichprobe: $X_1, X_2, \ldots, X_n, \qquad X_i \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$

   Mittelwert $\bar{X}_n$, Stichprobenvarianz S_X^2

2. Stichprobe: $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m, \qquad Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

   Mittelwert $\bar{Y}_m$, Stichprobenvarianz S_Y^2

<u>doppelter t-Test</u>

σ_X^2 und σ_Y^2 unbekannt, $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

Hypothese: a) $H_0 : \mu_X = \mu_Y$, $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$

b) $H_0 : \mu_Y \leq \mu_X$, $H_1 : \mu_Y > \mu_X$

c) $H_0 : \mu_Y \geq \mu_X$, $H_1 : \mu_Y < \mu_X$

Testgröße:

$$T = \sqrt{\frac{n \cdot m}{m+n}}\,\frac{\bar{Y}_m - \bar{X}_n}{\bar{S}}$$

mit

$$\bar{S} = \sqrt{\frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}}$$

Testentscheidung: Die Hypothese H_0 wird abgelehnt, falls:

a) $|T| > t_{n+m-2;1-\alpha/2}$, b) $T > t_{n+m-2;1-\alpha}$, c) $T < t_{n+m-2;\alpha}$,

wobei $t_{n+m-2;\alpha} = -t_{n+m-2;1-\alpha}$.

$\triangleright$ Bei $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ ist der sogenannte Welch-Test zu verwenden.

Welch-Test

σ_X^2 und σ_Y^2 unbekannt

Hypothese: a) $H_0 : \mu_X = \mu_Y$, $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$

b) $H_0 : \mu_Y \leq \mu_X$, $H_1 : \mu_Y > \mu_X$

c) $H_0 : \mu_Y \geq \mu_X$, $H_1 : \mu_Y < \mu_X$

Testgröße:

$$T = \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\sqrt{\frac{1}{n}S_X^2 + \frac{1}{m}S_Y^2}}$$

Testentscheidung: Die Hypothese H_0 wird abgelehnt, falls:

a) $|T| > t_{f;1-\alpha/2}$, b) $T > t_{f;1-\alpha}$, c) $T < -t_{f;1-\alpha}$,

Anzahl der Freiheitsgrade:

$$f = \frac{\left(\frac{1}{n}S_X^2 + \frac{1}{m}S_Y^2\right)^2}{\frac{1}{n^2(n-1)}S_X^4 + \frac{1}{m^2(m-1)}S_Y^4}$$

F-Test

Hypothese: $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$, $H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$

Testgröße:

$$T = \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

Testentscheidung: Die Hypothese H_0 wird abgelehnt, falls:

$T > F_{n-1,m-1;1-\alpha/2}$ oder $T < \dfrac{1}{F_{m-1,n-1;1-\alpha/2}}$.

Test zu Wahrscheinlichkeiten

• Gegeben Ereignis A, $P(A) = p$,

$H_n(A)$ absolute Häufigkeit des Auftretens von A in der Stichprobe der Länge n.

Test auf Vorliegen einer Wahrscheinlichkeit

p_0 vorgegeben

Hypothese: a) $H_0 : p = p_0$, $H_1 : p \neq p_0$

b) $H_0 : p \leq p_0$, $H_1 : p > p_0$

c) $H_0 : p \geq p_0$, $H_1 : p < p_0$

Testgröße:

$$T = \frac{H_n(A) - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$$

Testentscheidung: Die Hypothese H_0 wird abgelehnt, falls $|T| > \lambda_{1-\alpha/2}$.

Der χ^2-Anpassungstest

$A_1, A_2, \ldots, A_k$ paarweise unvereinbare Ereignisse mit $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \Omega$, $p_i = P(A_i) > 0$.
$h_1, \ldots, h_k$ seien die aus der Stichprobe ermittelten absoluten Häufigkeiten zu $A_1, \ldots, A_k$.
vorgegebene hypothetische Wahrscheinlichkeiten $p_{01}, p_{02}, \ldots, p_{0k}$ mit $p_{0i} > 0$, $\sum_{i=1}^{k} p_{0i} = 1$, Signifikanzniveau α
Wahl der A_i so, dass $np_{0i} \geq 5$. Ist $np_{0i} < 5$ mindestens für ein i, dann sind Ereignisse zusammenzufassen.

χ^2-Anpassungstest bei vorgegebenen Einzelwahrscheinlichkeiten

Hypothese: $H_0: \; p_1 = p_{01}, \; \ldots \; , p_k = p_{0k}$
Testgröße:

$$T = \sum_{i=1}^{k} \frac{(h_i - np_{0i})^2}{np_{0i}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \frac{h_i^2}{p_{0i}} - n$$

Unter H_0 ist T asymptotisch χ^2_{k-1}-verteilt.
Testentscheidung: Ist $T > \chi^2_{k-1;1-\alpha}$, so wird H_0 abgelehnt, anderenfalls nicht abgelehnt.