Prof. Dr. Eckhard Liebscher
Fachgruppe Mathematik

Wintersemester 23/24

Aufgabenserie 10 zur Vorlesung "Mathematik für Betriebswirte"

1. Bestimmen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen

a) $f(x,y) = x^2y^3 - 3x + xy^4$, **b)** $f(x,y) = (x-2y^2)^2$, **c)** $f(x,y) = xe^{x+2y}$,

d) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2^3 + 3x_1^2x_3^7$, **e)** $f(x,y) = y^3\ln(x) + \dfrac{y}{x}$.

Zu den Funktionen gebe man außerdem den Definitionsbereich an.

2. Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene der Funktion $f(x,y) = x^2 + 2ye^x + y^3 + 9$ an der Stelle (0,-2) an. Ermitteln Sie die Richtungsableitung von $f(x,y)$ an dieser Stelle in Richtung mit Winkel $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$.

3. Bestimmen Sie alle lokalen Extremwerte (Stelle, Funktionswert und Art des Extremums) der Funktion

$$f(x,y) = 3x^2 + 2y^3 - 6xy + 11 \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

4*. Führen Sie für die folgende Funktion eine Kurvendiskussion durch:

$$f(x) = (x+2)e^{1/x}.$$

Geben Sie die Nullstellen, die Extremstellen und die Wendestellen (der Nachweis mit Hilfe von $f'''(x)$ wird nicht verlangt) der jeweiligen Funktion an. Untersuchen Sie die Monotonie und das Krümmungsverhalten der Funktion.

5. Gegeben ist die Preis-Nachfragefunkion

$$n(p) = 10e^{-0.2p} \quad \text{für } p \geq 0.$$

Man ermittle die Elastizität der Nachfrage bezüglich des Preises. Interpretieren Sie die Elastizität für einen Preis von $p = 3$. Für welche Preise ist die Nachfrage elastisch, für welche unelastisch?

6*. Ein Unternehmen arbeitet mit der Kostenfunktion

$$K(x) = 2x^2 - 20x + 4050 \quad \text{für } x \geq 10.$$

Die produzierten Güter können zum konstanten Preis von 200 Geldeinheiten je Mengeneinheit des Outputs x abgesetzt werden.

a) Für welchen Output x erreicht das Unternehmen den maximalen Gewinn?

b) Bei welchem Output x arbeitet das Unternehmen im Betriebsoptimum, bei dem die Stückkosten minimal sind?

c) Für welchen Output x arbeitet das Unternehmen in der Gewinnzone?

7*. Die Firma "optprof.it" produziert einen Haushaltartikel mit folgender Gewinnfunktion:

$$G(x) = -10x^3 + 10000x - 67500.$$

a) Bei welcher Produktionsmenge x wird der Stückgewinn maximal?

b) Welche Menge x muss produziert werden, um den Gewinn zu maximieren?

c) Liegen die Produktionsmengen $x_1 = 10$ und $x_2 = 25$ in der Gewinnzone? Wenn ja, liegt das Intervall $[10, 25]$ in der Gewinnzone?