Prof. Dr. Eckhard Liebscher
Fachgruppe Mathematik

Wintersemester 23/24

Aufgabenserie 4 zur Vorlesung "Mathematik für Betriebswirte"

1. Wir betrachten die VektorenWir betrachten die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Untersuchen Sie **a)** die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bzw. **b)** die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ auf lineare Unabhängigkeit. Bei Abhängigkeit ist die entsprechende Abhängigkeitsgleichung anzugeben.

2. Für die Vektoren aus Aufgabe 1 bestimme man die Spatprodukte $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$ bzw. $[\vec{a}\vec{b}\vec{d}]$. Aus den Resultaten schlussfolgere man, ob die Vektoren ein Links- oder Rechtssystem bilden oder durch geeignete Parallelverschiebung in eine Ebene gebracht werden können.

3. Gegeben seien die Punkte $P_1(0, -2, 1), P_2(4, -6, 6), P_3(5, 0, 2), P_4(-5, 1, 6)$, $P_5(-3, 0, 11)$. Die Punkte P_1, P_2, P_3 liegen auf der Ebene E. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Ebene E und der Geraden g, die durch P_4 und P_5 verläuft.

4. Ebene E wie in Aufgabe 3. Geben Sie die Gleichung der Geraden h an, die senkrecht auf E steht und durch den Punkt $S(-4, 12, 3)$ verläuft. Bestimmen Sie den Schnittpunkt von E und h.

5. Wir betrachten die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie die Vektoren auf lineare Unabhängigkeit. Liegt Abhängigkeit der Vektoren vor, dann ist die entsprechende Abhängigkeitsgleichung anzugeben.

6*. Gegeben seien die Punkte $P_1(3, -2, 5), P_2(2, 1, 3), P_3(0, -1, 4), P_4(5, 7, 0)$, $P_5(8, 3, 3)$. Die Ebene E verläuft durch die Punkte P_1, P_2, P_3.
a) Geben Sie eine Parameterdarstellung und eine parameterfreie Gleichung der Ebene E an.

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Ebene E und der Geraden g, die durch die Punkte P_4 und P_5 geht.
c) Die Gerade h steht senkrecht auf E und geht durch $P_6(1, 1, -3)$. Geben Sie die Gleichung von h an.

7*. Die Punkte $P_1(8, 3, -4)$, $P_2(-4, 6, 5)$, $P_3(6, 6, 10)$ und $P_4(12, 7, 18)$ seien gegeben. Die Gerade g verlaufe durch die Punkte P_1, P_2. Die Punkte P_3, P_4 liegen auf der Geraden h.
a) Untersuchen Sie, ob sich die Geraden g und h schneiden. Wenn ja gebe man den Schnittpunkt an.
b) Die Ebene E verläuft senkrecht zur Geraden g durch den Punkt P_4. Geben Sie eine parameterfreie Gleichung von E an.