Prof. Dr. Eckhard Liebscher
Fachgruppe Mathematik

Wintersemester 24/25

Aufgabenserie 8 zur Vorlesung "Mathematik für Betriebswirte"

1. Ein Sparer zahlt jeweils am 1.1. eines Jahres den Betrag von 2000 Euro in einen Fonds ein. Das Geld wird mit einem Zinssatz von 7% jährlich verzinst. Wie groß ist der aktuelle Wert des eingezahlten Kapitals zum Beginn des 8. Jahres nach Einzahlen des ersten Betrages (8 Einzahlungen)?

2. Untersuchen Sie die folgende Funktion auf Nullstellen, Lücken und Polstellen

$$f(x) = \frac{x^3 + 7x^2 + 14x + 8}{x^2 + 3x - 4}.$$

Bestimmen Sie außerdem die Asymptote der Funktion und die Grenzwerte $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. An welchen Stellen ist die Funktion unstetig?
Hinweis: $x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = (x+1)\,(x^2 + 6x + 8)$

3.* Untersuchen Sie die folgende Funktion auf Nullstellen, Lücken und Polstellen

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^2 + 3x - 10}.$$

Bestimmen Sie außerdem die Asymptote der Funktion. Wie groß sind die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 2} f(x) \text{ und } \lim_{x\to 0} f(x)?$$

An welchen Stellen ist die Funktion unstetig?
Hinweis: Prüfen Sie, ob -1 eine Nullstelle des Polynoms $p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ ist.

4. Bestimmen Sie von folgenden Funktionen Definitionsbereich und Wertebereich:

$$\begin{aligned} \textbf{a)}\ f(x) &= \sqrt{x^3 - 1}, \quad \textbf{b)}\ f(x) = \frac{3x-5}{6x+3}, \\ \textbf{c)}\ f(x) &= 4 + \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Welche der Funktionen sind eineindeutig? Ermitteln ggf. die Umkehrfunktion und ihren Definitions- und Wertebereich.

5. Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned}
\textbf{a)}\quad f(x) &= x^{2/3} - x^7 + 4x^{1/4}, \quad \textbf{b)}\quad f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + 2x^3 \ln x, \\
\textbf{c)}\quad f(x) &= 3x^5 \left(1 - \sin x\right), \quad \textbf{d)}\quad f(x) = \frac{e^x + x}{x - 1}, \quad \textbf{e)}\quad f(x) = \frac{x^4 + 4x - 1}{x + 1}, \\
\textbf{f)}\quad f(x) &= x^4 \left(e^x + x\right), \quad \textbf{g)}\quad f(x) = \sqrt{1 - 3e^x}, \quad \textbf{h)}\quad f(x) = \cos\left(x^4\right), \\
\textbf{i)}\quad f(x) &= e^{x^2 - x}, \quad \textbf{k)}\quad f(x) = x \ln(x + 1), \quad \textbf{l)}\quad f(x) = \frac{1}{x} e^{\sqrt{x}}, \\
\textbf{m)}\quad f(x) &= \ln\left(e^x + 1\right).
\end{aligned}$$