

Aufgabenserie 9 zur Vorlesung "Mathematik für Betriebswirte"

1. Bilden Sie von folgenden Funktionen die ersten drei Ableitungen:

$$\mathbf{a)} \quad f(x) = \sin(2x + 1), \quad \mathbf{b)} \quad f(x) = (3x + 1)e^{-x}.$$

Welche Nullstellen, Extremstellen und Wendestellen hat die Funktion in b)?

2. Bestimmen Sie die ersten drei Ableitungen der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2}.$$

Geben Sie die Intervalle an, in denen die Funktion monoton wachsend bzw. monoton fallend ist. Bestimmen Sie die Wendepunkte. Für welche  $x$  ist die Funktion konvex bzw. konkav?

3. Die Kostenfunktion für die Produktion eines Produktes in Abhängigkeit vom Produktionsausstoß  $x$  kann durch die Funktion

$$K(x) = x^3 + 19x^2 + 110x + 200$$

beschrieben werden. Wie groß sind die Grenzkosten für einen Ausstoß von  $x = 10$  ME (Mengeinheiten)? Interpretieren Sie diesen Wert.

4. Führen Sie für die folgenden Funktionen eine Kurvendiskussion durch:

$$\begin{aligned} \mathbf{a)*} \quad f(x) &= x^2 e^{-2x}, & \mathbf{b)*} \quad f(x) &= \frac{x^2 - 4x - 5}{x + 3}, \\ \mathbf{c)*} \quad f(x) &= -\frac{4}{x} + 1 - x, & \mathbf{d)*} \quad f(x) &= x^2 \ln x. \end{aligned}$$

Geben Sie die Nullstellen, die Polstellen, die Extremstellen und die Wendepunkte der jeweiligen Funktion an. In welchem Intervall ist die Funktion c) konvex bzw. konkav?

5\*. Ein Unternehmen operiere als Monopolist am Markt mit folgender Preis-Nachfragefunktion:

$$p(x) = 23 - 0.1x.$$

Die Nachfrage wird durch einen entsprechenden Output befriedigt. Die Kostenfunktion des Unternehmens ist durch

$$K(x) = 0.01x^3 - 0.56x^2 + 26.6x$$

gegeben. Bestimmen Sie die Produktionsmenge  $x$ , für die der Gewinn maximal wird. Für welche Mengen  $x$  liegt das Unternehmen in der Gewinnzone?

**6.\*** Betrachten Sie die Wachstumsfunktion

$$f(x) = 8e^{0.3x} \quad \text{für } x \geq 1,$$

die die zeitliche Entwicklung des Produktionsvolumens eines Wirtschaftssektors in Geldeinheiten (GE) in einer Region beschreibt. Die Variable  $x$  gibt die Zeit an.

**a)** Bestimmen Sie die ersten drei Ableitungen der Funktion. Ist die Funktion konvex oder konkav?

**b)** Zum Zeitpunkt  $x = 20$  interessiert man sich dafür, welche Wachstumsprognose (Änderung des Produktionsvolumens) näherungsweise für die nächsten  $\Delta t$  Zeiteinheiten unter Verwendung der Ableitung von  $f(x)$  gegeben werden kann. Notieren Sie dafür eine Formel. Vergleichen Sie die Prognoseformel für  $x = 20$  und  $x = 30$ , wobei speziell  $\Delta t = 1$  angesetzt werden kann.

**c)** Man betrachte die allgemeine Wachstumsfunktion

$$f(x) = a e^{bx}$$

für das Produktionsvolumen und bestimme die Parameter  $a, b$  so, dass zur Zeit 0 ein Volumen von 20GE und zur Zeit 10 ein Volumen von 30GE vorliegt.